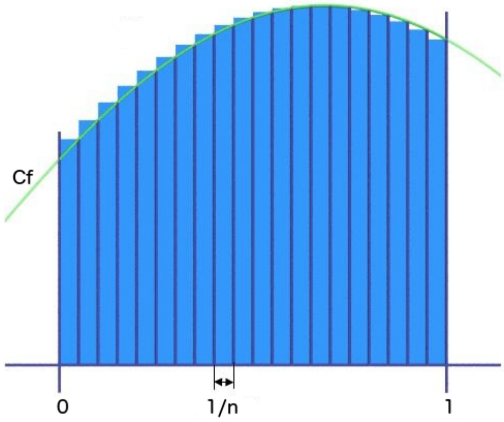
DM 9

Ces problèmes représentent une vraie préparation aux épreuves écrites. Il faudra donc vite prendre l'habitude de soigner la présentation de vos résultats, et mettre en avant la qualité de votre rédaction et la précision de vos raisonnements.

Exercice 1 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On rappelle que l'intégrale de f sur le segment $[0,1]$ peut être approchée par des rectangles situés de part et d'autre de la courbe : on parle de la méthode des rectangles à gauche ou à droite.



D'ailleurs, en prenant une subdivision à pas constant, on peut démontrer en toute rigueur que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt \qquad (1)$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la limite d'une suite ***en admettant le résultat de convergence (1) qui précède****.*

On définit la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$$

1. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln((2n)!) - \ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)$.
3. On pose alors $v_n = \ln(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$
   (b) Si u, v désignent des fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$, alors **on admet que la formule d'intégration par parties** nous permet d'écrire :
   $$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$
   En posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t)$, calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\,dt$.
   (c) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente de limite $\dfrac{4}{e}$.

Exercice 2 ($\star$) On considère une suite (a_n) de réels positifs ou nuls, avec $a_0 > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors :

$$P_n(x) = -a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

1. Montrer que P_n admet une unique racine strictement positive. On notera u_n cette racine.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

On se place alors dans le cas particulier où la suite des coefficients est définie par : $a_n = n + 1$.

3. Calculer u_1. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.
4. Etablir que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+2)u_n^{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)u_n^{n+2} = 0$.
5. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $P_n(x) = -1 + \dfrac{d}{dx}(\sum_{k=1}^{n} x^{k+1})$, avec $\dfrac{d}{dx}$ qui désigne l'opérateur dérivé.
6. En déduire que pour tout $n \geq 2$,
$$P_n(x) = \frac{4x - 2x^2 - 1 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2} \text{ , avec } x \neq 1$$
7. Déterminer alors $\lim u_n$.