DM 8

Ces problèmes représentent une vraie préparation aux épreuves écrites. Il faudra donc vite prendre l'habitude de soigner la présentation de vos résultats, et mettre en avant la qualité de votre rédaction et la précision de vos raisonnements.

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln(x)}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie A - Etude de la fonction f

1. Montrer que l'équation $x + 1 + \ln(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique $\alpha \in [0, 1]$.
2. (a) La fonction f est-elle continue en 0? Est-elle dérivable en 0?
   (b) Etudier alors les variations de f et préciser sa limite en $+\infty$.
   (c) Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. Déterminer les points d'intersection de C_f et de la droite d'équation $y = -x$.
   (d) Représenter alors C_f.

Partie B - Limite d'un suite réelle

On considère (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

3. Déterminer un réel a tel que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi at^2\cos(nt)\,dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

   Indication *: on appliquera deux fois la formule d'intégration par parties, pour abaisser la puissance...*

4. Exprimer la somme S_n à l'aide d'une intégrale.
5. Etablir que pour tout réel t différent de $2p\pi$ ($p \in \mathbb{Z}$),

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}$$

6. On considère la fonction g définie par $g(t) = \dfrac{t^2}{\sin(\frac{t}{2})}$ si $t \in]0, 2\pi[$ et $g(0) = 0$. Montrer que g est de classe C^1 sur $[0, 2\pi[$.
7. (a) Vérifier alors que:

$$S_n = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi g(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt$$

   (b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que si h est une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$, alors on a:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |\int_0^\pi h(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt| \leq \frac{|h(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\pi M}{n+\frac{1}{2}}$$

   avec $M = max_{t\in[0,\pi]}|h'(t)|$.

   (c) En déduire la limite de la suite (S_n).

8. En utilisant (S_{2n+1}), retrouver alors que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$$

Par comparaison série-intégrale, on peut aisément montrer que pour tout $\alpha > 1$, les séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont convergentes, et on notera $\zeta(\alpha)$ leur limite. Ici, on a donc enfin démontré que :

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2 ($\star$) On rappelle qu'on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et on considère la série de terme général u_n défini par:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}$$

1. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\sum_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de H_n et H_{2n+1}.
3. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.