DM 7

Ces problèmes représentent une vraie préparation aux épreuves écrites. Il faudra donc vite prendre l'habitude de soigner la présentation de vos résultats, et mettre en avant la qualité de votre rédaction et la précision de vos raisonnements.

Exercice 1 On considère la série harmonique alternée (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

L'objectif de ce problème est de déterminer la nature de la série (u_n) et de mesurer sa vitesse de convergence.

1. Fixons $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q est donnée par :
$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$
2. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1}\, dx$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle u_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\, dx$.
4. Etablir alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$$

On note f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

5. Etudier les variations de f sur $[0,1]$, puis montrer que f est bornée.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx \leq \frac{1}{n+1}$$
7. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \ln(2)| \leq \dfrac{1}{n+1}$.
8. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 2 Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = a_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
2. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle e - a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t\, dt$.
3. Etablir que pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)e^t \leq 1$.
4. En déduire que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < e - a_n < \frac{1}{n \times n!}$$
5. Justifier alors que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes de même limite e.
6. On suppose que e est un nombre rationnel.
   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel non nul q tel que $eq! \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer alors que $q!(e - a_q)$ est un entier compris strictement entre 0 et 1. Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 3 ($\star$) On se propose dans cette partie d'étudier la fonction définie pour tout nombre réel t par :

$$f(t) = e^{-t}\cos(t)$$

et de donner une allure de sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4})$.

2. Etudier sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ les variations de f.

3. Soient $k \in \mathbb{Z}, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

   (a) Exprimer $f(t + 2k\pi)$ en fonction de $f(t)$.

   (b) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$.

4. On note u, v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$, C_u et C_v les courbes représentatives associées.

   (a) Déterminer les points d'intersection de C_f et C_u, puis les points d'intersection de C_f et C_v.

   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   (c) Représenter sur un même graphique les courbes C_f, C_u et C_v. *On tiendra compte des questions précédentes pour construire l'allure de ces courbes avec soin.*

5. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on pose:

$$a_k = \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} f(t)dt$$

   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = ch(\frac{\pi}{2})(-e^{-\pi})^k$.

   (b) Calculer alors la limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$