DM 6

Ces problèmes représentent une vraie préparation aux épreuves écrites. Il faudra donc vite prendre l'habitude de soigner la présentation de vos résultats, et mettre en avant la qualité de votre rédaction et la précision de vos raisonnements.

Exercice 1 *L'objectif de cet exercice est d'étudier une fonction définie sous la forme d'une intégrale dépendant de sa borne supérieure.*

Partie A - Etude d'une première fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

et on note (C_f) sa courbe représentative.

1. Expliquer brièvement pourquoi la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x)$.

3. Etudier les variations de g, et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^*$.

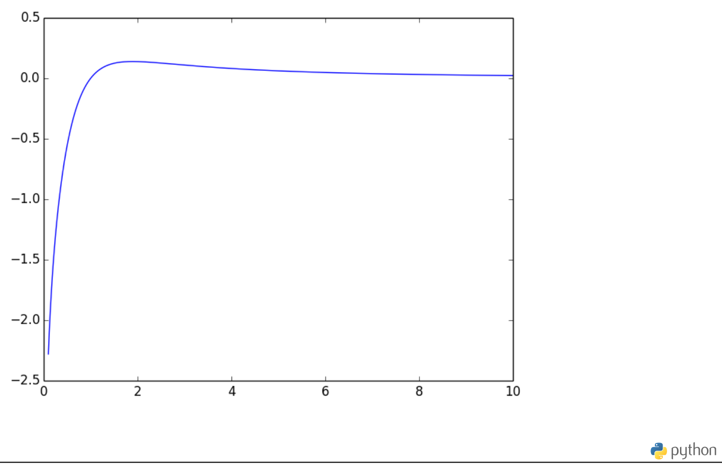
4. Dresser le tableau de variations de f, puis préciser les limites de f en 0 et $+\infty$.

5. Dans le langage Python, construire la fonction *graphe* qui, pour tout couple (a, b) donné :

   - définit au sein du programme la fonction f : on pourra chercher de l'aide sur la commande `lambda`.
   - puis renvoie le graphe de f sur le segment $[a, b]$

   On pensera évidemment à importer les modules nécessaires et ainsi :

```
In : graphe(0.1,10)
```



Partie B - Un encadrement de la fonction arctan sur $[0, +\infty[$

On note encore arctan la bijection réciproque de la fonction tan restreinte à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

6. Justifier que la fonction arctan est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\arctan''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

7. En déduire que arctan est concave sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\arctan(x) \leq x$.

8. Montrer alors que pour tout $x \in [0, +\infty[$,
$$\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$$

On introduit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\phi(x) = \frac{\arctan x}{x}$$

9. Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de $\phi(0)$ permettant le prolongement de ϕ sur $\mathbb{R}_+$.

Partie C - Etude d'une intégrale dépendant de sa borne supérieure

Dans cette dernière partie, on définit la fonction F sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$$

Il s'agit là d'**une intégrale dépendant de sa borne supérieure**, c'est à dire que F désigne l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ satisfaisant la condition $F(1) = 0$.

10. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis préciser $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On rappelle que si u et v désignent deux fonctions de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, alors on a la formule de dérivation : $(uv)' = u'v + uv'$. Et ainsi, en intégrant cette dernière égalité, il vient :

$$\int_1^x u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)\,dt \quad (*)$$

11. En utilisant la formule d'intégration (*), montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $F(x) = \arctan(x).\ln(x) - \displaystyle\int_1^x \phi(t)\,dt$.

12. Etablir alors que F est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de $F(0)$ permettant le prolongement de F : on pourra d'ailleurs donner cette valeur sous forme intégrale.

13. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

14. En déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de F sur $[0, +\infty[$.