DM 5

Ces problèmes représentent une vraie préparation aux épreuves écrites. Il faudra donc vite prendre l'habitude de soigner la présentation de vos résultats, et mettre en avant la qualité de votre rédaction et la précision de vos raisonnements.

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x)} \text{ , si } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ 0 \text{ , si } x = 0 \end{cases}$$

Partie A - Etude de la fonction f

1. Etablir que la fonction f est continue en 0.
2. Montrer que cette fonction est dérivable en 0, puis préciser la nature de sa tangente T_0 en 0.
3. Calculer les limites de $f(x)$ quand $x \to 1$ et quand $x \to +\infty$, puis préciser la nature de ces branches infinies.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur lequel on fera apparaître l'image de e par f.
5. Construire alors le graphe de f sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$.

Partie B - Approximation de $e = \exp(1)$

Dans la suite de l'exercice, on définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 3 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\ln(u_n)}$$

6. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e$.
7. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
8. Etablir que pour tout $t \geq e$, $f'(t) \leq \dfrac{1}{4}$.
9. En déduire que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $e \leq a \leq b$, on a l'inégalité :
$$f(b) - f(a) \leq \frac{1}{4}(b-a)$$
10. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}$.
11. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).
12. Dans le langage Python, construire la fonction *indice* qui pour tout ϵ donné, calcule les valeurs de u_n tant que $|u_n - e| \geq \epsilon$, puis renvoie le rang n à partir duquel $|u_n - e| < \epsilon$.
On pourra afficher le couple (k, u_k) à chaque étape pour observer la convergence.

Adapté du concours des petites Mines