## DM 4

*Ces problèmes représentent une vraie préparation aux épreuves écrites. Il faudra donc vite prendre l'habitude de soigner la présentation de vos résultats, et mettre en avant la qualité de votre rédaction et la précision de vos raisonnements.*

**Exercice 1** On définit la fonction $f$ sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(1+\dfrac{1}{x^2})$ et on pose :

$$\forall\, x \in ]0,+\infty[,\ g(x) = \ln(1+\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x^2+1}$$

1. Dresser le tableau de variations de $g$ sur $]0,+\infty[$. On détaillera le calcul des limites aux bornes du domaine.
2. Montrer alors qu'il existe un unique $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$.
3. Montrer que :
$$\forall\, x \in\ [0,+\infty[,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \qquad (1)$$
En déduire que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, c'est à dire que $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$.
4. Etudier alors la fonction $f$ sur $]0,+\infty[$.
5. Justifier enfin que $f$ est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement, noté encore $f$, est-il aussi dérivable en 0 ?

**Exercice 2** *Dans ce problème, on étudie les séries de Riemann et on s'intéressera, dans quelques cas particuliers, à leur comportement asymptotique.*

On appelle **série de Riemann** toute suite $(u_n)$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\ \text{, avec } \alpha \text{ une constante réelle fixée}$$

### Partie A - Le cas particulier de la série harmonique

Pour $\alpha = 1$, on obtient la **série harmonique**, c'est à dire la somme $(u_n)$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

1. On note $f$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Représenter $C_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un plan muni d'un repère.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Représenter graphiquement l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt$, puis justifier que $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{k}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq u_n$.
4. Montrer enfin que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

### Partie B - Un autre cas particulier bien connu

Pour $\alpha = 2$, on obtient la série définie par la somme suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $u_{n+1} - u_n$, puis préciser la monotonie de la suite $(u_n)$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$
7. En rappelant le théorème utilisé, justifier alors que la suite $(u_n)$ est bien convergente.
8. On cherche enfin une valeur approchée de la limite de la suite $(u_n)$.
Dans le langage Python, définir la fonction *riemann* qui, pour tout couple $(n,\alpha)$, construit la liste des termes $\dfrac{1}{k^\alpha}$ pour $k$ allant de 1 à $n$, puis renvoie la somme des termes de la liste. On pourra utiliser la fonction intégrée `sum`.

Par exemple,

```
In : riemann(1000,2)
1.6439345666815615
```