DM 3

Ces problèmes représentent une vraie préparation aux épreuves écrites. Il faudra donc vite prendre l'habitude de soigner la présentation de vos résultats, et mettre en avant la qualité de votre rédaction et la précision de vos raisonnements.

Exercice 1 On considère la suite u définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 5 \end{cases}$$

1. Déterminer ℓ la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \ell$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, et en déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Calculer alors la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et préciser $\lim S_n$.

Exercice 2 On définit la fonction f sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k) = \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{3(\ln 3)^2} + \ldots + \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Pour finir, on rappelle que par croissances comparées, on a pour tout $\alpha > 0$, $x\ln^{\alpha}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

1. Déterminer les limites de $f(x)$ quand $x \longrightarrow 0, x > 0$ et quand $x \longrightarrow +\infty$. On précisera les droites asymptotes éventuelles.
2. La fonction f peut-elle être prolongée par continuité en 1 ?
3. Montrer que pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$,
$$f'(x) = \frac{-\ln(x) - 2}{x^2(\ln(x))^3}$$
4. Rappeler le signe de $\ln(x)$ lorsque $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f.
5. Construire alors l'allure de C_f la courbe représentative de f sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. On placera approximativement la tangente au point d'abscisse e^{-2}.
6. Montrer que $F : x \longmapsto -\dfrac{1}{\ln(x)}$ désigne une primitive de f sur $]1,+\infty[$.
7. Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Représenter graphiquement $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt$, puis justifier que pour tout $k \geq 2$:
$$f(k+1) \leq -\frac{1}{\ln(k+1)} + \frac{1}{\ln(k)} \leq f(k)$$
8. Etablir alors que :
$$S_n - \frac{1}{2(\ln(2))^2} \leq \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)} \leq S_{n-1}$$
9. Etudier la monotonie de la suite (S_n).
10. Prouver alors que (S_n) converge vers une limite finie.
11. Dans le langage Python,
    (a) construire la fonction f qui pour tout x réel, renvoie l'image de x si celle-ci est définie. On tiendra donc compte du domaine de définition afin de renvoyer éventuellement un message d'erreur.
    (b) construire le programme *somme* qui pour tout entier n donné, définit la liste des images $\{f(k),\ k \in [\![2,n]\!]\}$ puis renvoie l'instruction `sum(L)` de sorte que :

```
In : somme(5000)
                1.9923346085315792
```

On en déduit ici une approximation de la limite de la suite (S_n).