DM 2

Ces problèmes représentent une vraie préparation aux épreuves écrites. Il faudra donc vite prendre l'habitude de soigner la présentation de vos résultats, et mettre en avant la qualité de votre rédaction et la précision de vos raisonnements.

Exercice 1 Dans de nombreux exercices, il peut être utile d'utiliser des **inégalités de convexité** ou de **concavité**, c'est à dire des inégalités entre une fonction et l'expression d'une de ses tangentes.

Partie A - Deux exemples fondamentaux

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et on suppose de plus que f est deux fois dérivable. On admet alors à ce stade de l'année que :

- f est convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ est croissante sur $I \Leftrightarrow$ pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.
- f est concave sur $I \Leftrightarrow f'$ est décroissante sur $I \Leftrightarrow$ pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

1. On pose $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x$. Justifier que f est convexe sur $\mathbb{R}$, puis donner l'expression de sa tangente en 0.
2. On pose $g : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(x)$. Justifier que g est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, puis donner l'expression de sa tangente en 1.
3. Dans le langage Python, construire la fonction *graphique* qui prend pour seul argument un entier n correspondant au nombre de points, et renvoie dans une même fenêtre :
   - la courbe représentative de f sur $[-10, 10]$,
   - la courbe représentative de g sur $[0.1, 10]$,
   - les tangentes associées à chacune de ces courbes au point 0 pour l'une et 1 pour l'autre.

   On prendra soin d'importer les bibliothèques utiles en amont du programme, et d'ajouter une légende pour identifier chacune des courbes.

Partie B - Inégalités de convexité et de concavité

Dans cette partie, on suppose que f désigne une fonction quelconque deux fois dérivable et convexe sur un intervalle I.
Soit $a \in I$ fixé, on pose t_a la fonction qui définit la tangente en a de sorte que :

$$t_a : x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$$

4. On définit la fonction $\Delta : x \in \ I \ \mapsto f(x) - t_a(x)$.
   (a) Calculer $\Delta'(x)$, puis déterminer le signe de $\Delta'(x)$ en fonction de a.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \ I$, $\Delta(x) \geq 0$.
   (c) Si on note C_f la courbe représentative de f, préciser alors la position relative de C_f par rapport à ses tangentes ?
5. En adaptant les questions précédentes, que pourrions-nous dire si f avait été supposée concave sur I ?
6. Démontrer alors que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x+1 \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq x-1$$

Exercice 2 On considère le polynôme P défini par :

$$P(x) = \frac{1}{4}x^2(x-1)^2$$

et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 + 1^3 + \ldots + n^3$.

1. Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = x^3$.
2. En déduire que $S_n = P(n+1) - P(0)$.
3. Retrouver alors la formule remarquable[1] :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

[1] Candice, c'est cadeau... cela te fait maintenant trois formules remarquables à connaître ;)