DM 13

Ces problèmes représentent une vraie préparation aux épreuves écrites. Il faudra donc vite prendre l'habitude de soigner la présentation de vos résultats, et mettre en avant la qualité de votre rédaction et la précision de vos raisonnements.

Exercice 1 On appelle **intégrale de Gauss** l'intégrale généralisée I définie par :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$

L'objectif de ce problème est de déterminer la valeur de I à l'aide des intégrales de Wallis.

Partie A - Etude de la fonction cotan

On rappelle que cotan désigne la fonction définie sur $D = \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par :

$$\forall\, x \in D,\ \text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

1. Etudier la parité et la périodicité de la fonction cotan.
2. Dresser le tableau de variations de cotan sur $]0, \pi[$. En déduire sa courbe représentative dans un plan muni d'une repère orthonormé.

Partie B - Propriétés des intégrales de Wallis

On rappelle que les intégrales de Wallis sont définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\, dt$$

3. En raisonnant par l'absurde, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \neq 0$.

On a déjà montré à plusieurs reprises que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n$$

4. Montrer que (W_n) désigne une suite décroissante, puis établir alors que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.
5. On pose pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que la suite (u_n) est constante et déterminer sa valeur.
6. En déduire que :

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Partie C - Calcul de l'intégrale de Gauss

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$,

$$(1 - \frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2} \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$$

8. En posant $t = \sqrt{n}\, \cos(u)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n\, dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\, du$$

9. En posant $t = \sqrt{n}\,\text{cotan}(u)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}\, dt = \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u)\, du$$

10. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement :

$$\sqrt{n}\, W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt \leq \sqrt{n}\, W_{2n-2}$$

11. Déterminer alors la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Exercice 2 ($\star$) On rappelle que la série harmonique (H_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = H_n - \ln(n)$.

1. On note $f : t \in]0, +\infty[\longmapsto \dfrac{1}{t}$. En utilisant les propriétés de l'intégrale, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

2. Etablir alors que la suite (S_n) est décroissante et minorée. On note γ sa limite.
3. On définit enfin la suite (ε_n) telle que : $\varepsilon_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. Justifier alors que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.

Ainsi, on a construit un **développement asymptotique** de H_n de sorte que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

On introduit maintenant la série harmonique alternée définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{2n+1} = H_{2n+1} - H_n$.
5. En utilisant le développement asymptotique de la série harmonique, établir que la suite (A_{2n+1}) est convergente de limite $\ln(2)$.
6. Montrer alors que $A_{2n} \longrightarrow \ln(2)$ quand $n \to +\infty$.
7. Que pouvez-vous en déduire quant à la nature de la série harmonique alternée ?

Si on décrit la série harmonique alternée, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

On construit la suite (B_n) à partir de la série harmonique alternée et pour laquelle on réarrange les termes en plaçant un terme positif avec les deux termes négatifs qui suivent, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \ldots$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{4k-2} - \dfrac{1}{4k}$.

8. Dans le langage Python, construire la fonction *somme* qui pour tout entier n non nul, renvoie la valeur de B_n. On ajoutera un test sur le paramètre n de sorte que le programme renvoie une erreur de type **TypeError** si celui-ci n'appartient pas à $\mathbb{N}^*$.

En testant votre programme, vous pouvez remarquer que :

$$B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(2)}{2}$$

Le fait de réarranger les termes d'une somme peut en effet conduire à une limite différente et vous verrez l'an prochain un ***théorème de convergence commutative****, aussi appelé* ***théorème de sommation par paquets****, qui vous permettra sous certaines conditions d'obtenir la même limite quel que soit le regroupement des termes de la série.*

9. En utilisant le développement asymptotique obtenu à l'issue de la question 3, prouver rigoureusement que $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ln(2)}{2}$.