DM 12

Ces problèmes représentent une vraie préparation aux épreuves écrites. Il faudra donc vite prendre l'habitude de soigner la présentation de vos résultats, et mettre en avant la qualité de votre rédaction et la précision de vos raisonnements.

Exercice 1 *L'objectif de cet exercice, extrait d'un sujet de CAPES, est d'utiliser les intégrales de Wallis afin de retrouver la somme de la série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^2}$.

Dans tout le problème, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Partie A - Résultat préliminaire

On pose $f : x \in [0, \frac{\pi}{2}] \longmapsto x - \frac{\pi}{2}\sin(x)$.

1. Montrer que la restriction de la fonction cos à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle à préciser.
2. On note encore arccos sa bijection réciproque. Déterminer l'unique réel $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $f'(x_0) = 0$.
3. Etudier alors les variations de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis montrer que :
$$\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ x \leq \frac{\pi}{2}\sin(x)$$

Partie B - Détermination de la limite de (S_n) par les intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\, dt \quad , \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\, dt \quad , \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

4. Calculer les intégrales I_0 et J_0.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.
6. Etablir par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$
7. Soit $n \geq 1$. Par intégration par parties, démontrer la relation : $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.
8. En déduire que pour tout $k \geq 1$: $K_{k-1} - K_k = \frac{\pi}{4k^2}$.
9. Démontrer alors l'égalité :
$$\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$$
10. En utilisant l'inégalité de la **partie A**, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$.
11. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$.
12. Etablir alors que la suite (S_n) est convergente et montrer que :
$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$$

Adapté du concours du Capes externe de mathématiques