DM 11

Ces problèmes représentent une vraie préparation aux épreuves écrites. Il faudra donc vite prendre l'habitude de soigner la présentation de vos résultats, et mettre en avant la qualité de votre rédaction et la précision de vos raisonnements.

Exercice 1 Dans cet exercice, on souhaite déterminer une valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{5})$. En particulier, on donne :

$$\sqrt{5} \simeq 2.236067977$$

1. Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0\ [2\pi]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos(n\frac{x}{2})\frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

2. Donner l'ensemble des solutions de l'équation $z^5 - 1 = 0$ sous forme exponentielle.

3. Représenter alors dans le plan complexe le pentagone régulier associé.

4. Déterminer le polynôme $Q(z)$ de degré 4 vérifiant l'égalité :

$$z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$$

5. Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que:

$$\frac{Q(z)}{z^2} = a(z+\frac{1}{z})^2 + b(z+\frac{1}{z}) + c$$

6. On pose alors $Z = z + \frac{1}{z}$. Résoudre l'équation :

$$Z^2 + Z - 1 = 0$$

7. En déduire que les solutions de l'équation $Q(z) = 0$ sont les complexes z_1, z_2, z_3, z_4 définis par:

$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}\ ,\ z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$$

$$z_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\ ,\ z_4 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

8. Donner les valeurs exactes de $\cos(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{4\pi}{5})$, $\cos(\frac{6\pi}{5})$ et $\cos(\frac{8\pi}{5})$. On justifiera rapidement ses choix.

9. Préciser finalement la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{5})$.

10. Calculer alors la somme $\sum_{k=0}^{4} \cos(\frac{2k\pi}{5})$.

11. Justifier le résultat précédent d'une autre façon.

Exercice 2 ($\star$) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \ln(k) \text{ , avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la monotonie de la suite (u_n).

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \ln(k+1)$.

3. On introduit alors la fonction f définie pour tout $x > 0$ par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \ln(x+k)$$

et considérons la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{-n!}{X(X+1)\dots(X+n)}$.

(a) Décomposer $F(X)$ en éléments simples, c'est à dire déterminer les nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X+k}$$

(b) Soit $x > 0$. Calculer $f'(x)$, puis en déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$.

(c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

(d) Préciser alors la monotonie de la suite (u_n).