DM 10

Ces problèmes représentent une vraie préparation aux épreuves écrites. Il faudra donc vite prendre l'habitude de soigner la présentation de vos résultats, et mettre en avant la qualité de votre rédaction et la précision de vos raisonnements.

Exercice 1 *Dans ce problème, on cherche à déterminer le comportement asymptotique d'un système dynamique discret de la forme* $u_{n+1} = h(u_n)$*, où* h *désigne la fonction* $h : x \longmapsto \ln(1+2x)$.

On note g la fonction définie sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x) - x}{x}, & \text{si } x \in]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty[\\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie A - Approximation locale par les polynômes de Taylor

On pose $I =]-1, +\infty[$, et on considère la fonction $f : x \in I \longmapsto \ln(1+x)$.

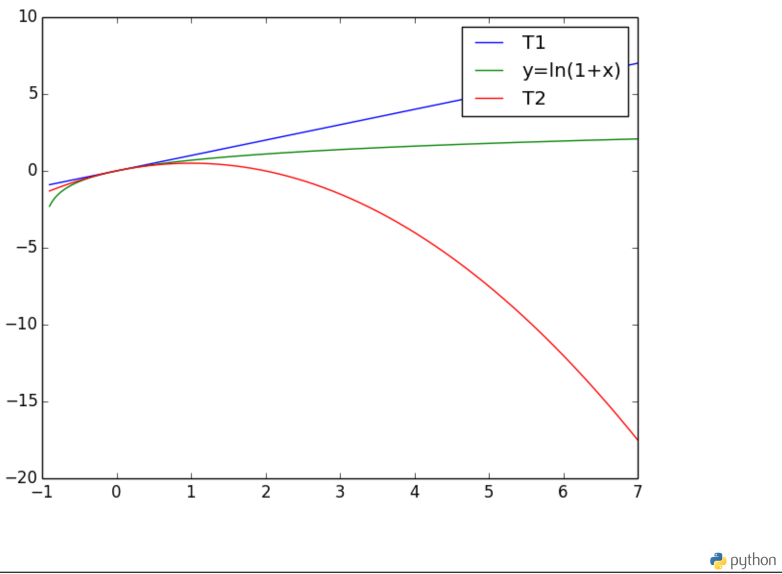
1. Justifier que la fonction f est de classe C^∞ sur l'intervalle I .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le **polynôme de Taylor** d'ordre n associé par :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

   Donner alors l'expression des polynômes T_1 et T_2.

4. Dans le langage Python, construire la fonction *representation* qui pour tout couple (a, b) donné, renvoie sur un même graphe, la courbe représentative de la fonction f sur $[a, b]$, et les polynômes T_1 et T_2. On n'oubliera pas de construire une légende de sorte que :

```
In : representation(-0.9,7)
```



A ce stade de l'année, on pourra donc admettre que ces polynômes nous donnent une **approximation locale** de f en 0 et ainsi, on retiendra pour le reste du problème :

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + X^2\epsilon(X) \text{ , avec } \epsilon(X) \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad (1)$$

Partie B - Etude de la fonction g sur $]-\frac{1}{2},+\infty[$

5. En adaptant l'égalité (1) obtenue dans la **partie A**, établir que g est continue en 0.

6. Montrer de la même façon que g est dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.

On pose $i : x \in]-\dfrac{1}{2}, 0[\cup]0,+\infty[\longmapsto 2x-(1+2x)\ln(1+2x)$.

7. Déterminer le signe de $i(x)$ sur $]-\dfrac{1}{2},0[\cup]0,+\infty[$.

8. En déduire les variations de g. On calculera avec soin les limites aux bornes du domaine de définition.

9. Montrer que la fonction g s'annule en un unique point $\alpha \in]1,+\infty[$.

Partie C - Etude de la suite (u_n)

Dans cette dernière partie, on pose $h : x \in I \longmapsto \ln(1+2x)$ et on considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = h(u_n) = \ln(1+2u_n)$$

10. On suppose que u_0 est dans l'intervalle $]0,\alpha]$.
    (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,\alpha]$.
    (b) Etablir que la suite (u_n) est convergente de limite α.

11. On suppose que u_0 est dans l'intervalle $[\alpha,+\infty[$.
    (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\alpha,+\infty[$.
    (b) Etablir que la suite (u_n) est convergente de limite α.

Exercice 2 ($\star$) On considère les suites de termes strictement positifs (x_n) et (y_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = b \\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n} \end{cases}$$

avec $0 < a < b$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la convergence de ces deux suites.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$$

2. En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes.

3. Prouver de plus qu'elles possèdent la même limite qu'on notera ℓ.

4. On fixe $y_0 = b$ et considérons $x_0 = b\cos(\theta)$ avec $\theta \in]0,\dfrac{\pi}{2}[$.
    (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
    $$\begin{cases} y_n = b.\prod_{k=1}^{n}\cos(\dfrac{\theta}{2^k}) \\ x_n = y_n.\cos(\dfrac{\theta}{2^n}) \end{cases}$$
    (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En multipliant y_n par $\sin(\dfrac{\theta}{2^n})$, déterminer une expression simple de y_n.
    (c) En déduire la valeur de leur limite commune ℓ.