DM 1

Ces problèmes représentent une vraie préparation aux épreuves écrites. Il faudra donc vite prendre l'habitude de soigner la présentation de vos résultats, et mettre en avant la qualité de votre rédaction et la précision de vos raisonnements.

Exercice 1 L'objectif de ce problème est de déterminer la limite du produit u_n quand n tend vers $+\infty$ défini par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2}) = (1+\frac{1}{n^2})\times(1+\frac{2}{n^2})\times\ldots\times(1+\frac{n}{n^2})$$

Dans tout l'exercice, on note f la fonction définie par $f(x)=\ln(1+x)$ et I l'intervalle sur lequel f est définie.

Partie A - Un premier encadrement

1. Donner le domaine de définition de f qu'on notera I.
2. Construire le tableau de variations de f. On donnera les limites aux bornes de I et on précisera les asymptotes éventuelles.
3. Déterminer T_0 la tangente en 0 à la courbe C_f représentative de la fonction f.
4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, représenter la courbe C_f et sa tangente T_0.
5. Montrer que :

$$\forall\, x \in\ [0,+\infty[,\ x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \tag{1}$$

6. (a) Dans le langage Python, définir la fonction f qui pour tout x donné, teste si x appartient à I avant de renvoyer la valeur de $f(x)$. Le programme affichera un message d'erreur si $x \notin I$.
   (b) Construire la fonction *representation* qui ne prend pas d'argument, mais affiche les courbes associées aux fonctions f, $g : x \longmapsto x-\dfrac{x^2}{2}$ et $h : x \longmapsto x$ sur $[0,+\infty[$.

Partie B - Détermination de la limite du produit

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les sommes suivantes par:

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2$$

et on pose (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n^2}) = \ln(1+\frac{1}{n^2})+\ln(1+\frac{2}{n^2})+\ldots+\ln(1+\frac{n}{n^2})$$

7. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
8. En utilisant l'encadrement (1), établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{R_n}{n^2} - \frac{S_n}{2n^4} \leq v_n \leq \frac{R_n}{n^2}$$

9. Donner l'expression de R_n en fonction de n, puis déterminer la limite de v_n quand $n \to +\infty$.
10. En déduire que la suite (u_n) converge quand $n \to +\infty$ et préciser sa limite.

Exercice adapté du premier devoir de l'an dernier