

## Séance 4

## Calcul intégral

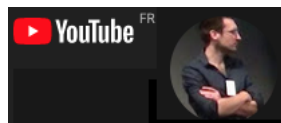
Vous avez découvert la notion d'intégrale en terminale, vue comme la mesure algébrique d'une aire sous la courbe d'une fonction... Pourtant il s'agit là d'un vrai objet mathématique qui prolonge naturellement les sommes discrètes notées  $\Sigma$ , et dont les propriétés sont également très nombreuses : linéarité, croissance, relation de Chasles, transformation algébrique ou encore calcul à l'aide du théorème fondamental de l'analyse ou d'une intégration par parties.

En mathématiques, le symbole intégral est un opérateur très utile et il interviendra dans de nombreux problèmes. Il faudra donc rapidement en maîtriser toutes les propriétés et ne pas avoir peur de le manipuler.

**Exercice 1** On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \int_0^\pi \sin(t)e^{-\sqrt{t+n\pi}} dt$ .

1. Montrer que  $(u_n)$  est décroissante. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
2. Prouver alors que la suite  $(u_n)$  est de limite nulle.

Ce premier exercice n'est pas simple, et je vous invite à suivre sa résolution avec moi sur :



## Pour vous entraîner

**Exercice 2** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

1. Calculer  $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$ .
2. On pose  $I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$ .  
Calculer  $I_1 + I_2$ . En déduire la valeur de  $I_2$ .

**Exercice 3** On définit la suite  $(I_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{e^t + 1} dt$$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Donner la valeur de  $I_{n+1} + I_n$ .

On va alors étudier la nature de la suite  $(I_n)$ , et cela de deux façons.

## 2. Méthode 1 :

- (a) Justifier que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$$

- (b) En déduire le comportement asymptotique de  $I_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

## 3. Méthode 2 :

- (a) Etablir que la suite  $(I_n)$  est croissante.  
(b) Retrouver alors le comportement asymptotique de la suite  $(I_n)$  en utilisant la première question.