Séance 3

Cas particulier des fonctions usuelles

Les fonctions d'une variable réelle sont importantes en mathématiques. Elles peuvent d'ailleurs prendre différentes formes : fonctions affines, fonctions polynômes, des expressions avec des radicaux, logarithmes ou exponentielles, des fonctions trigonométriques voire des combinaisons de tout ça ! Et au delà de leur simple manipulation, vous devez connaître leurs propriétés associées : domaine de définition, de dérivabilité, variations, signe et comportement aux bords, transformations algébriques...

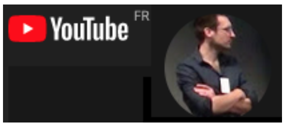
En fait, ces fonctions usuelles sont des objets très utiles car elles interviendront dans de nombreux problèmes, notamment les fonctions trigonométriques dont les principales transformations doivent être connues ou retrouvées rapidement.

Exercice 1 On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on considère la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cos^3(3^k x)}{3^k}$$

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^3(\theta) = \frac{3}{4}\cos(\theta) + \frac{1}{4}\cos(3\theta)$.
2. En déduire alors une expression plus simple de S_n et déterminer sa limite en fonction de x.

Ce premier exercice n'est pas simple, et je vous invite à suivre sa résolution avec moi sur :



Pour vous entrainer

Exercice 2 On note tan la fonction tangente définie sur un domaine $\mathcal{D}$ par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

1. Déterminer le domaine $\mathcal{D}$ sur lequel tan est définie.
2. On restreint alors l'étude de tan à l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   (a) Justifier que tan est dérivable sur I et établir que pour tout $x \in I$,
   $$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
   (b) En déduire les variations de tan sur l'intervalle I.
   (c) Calculer les limites de $\tan(x)$ aux bornes de I, puis construire sa représentation graphique sur l'intervalle I.

Exercice 3 Soient p et q deux entiers naturels non nuls. Calculer alors la valeur de l'intégrale :

$$I(p,q) = \int_0^{2\pi} \sin(pt)\cos(qt)\,dt$$

On pourra discuter les cas $p = q$ et $p \neq q$.