Séance 2

Etude de fonctions

Les fonctions d'une variable réelle sont introduites au collège et depuis, vous avez dû faire face à de nombreux exercices en maths, physique, ou même SVT... que ce soit pour résoudre graphiquement des équations ou simplement lire des valeurs sur une courbe représentative. Bien entendu, au delà du vocabulaire spécifique à ces fonctions, il est important de savoir mener une telle étude de fonctions : recherche du domaine de définition, calcul de la dérivée et étude de son signe, monotonie et tableau de variations, limites et représentation graphique.

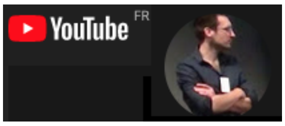
En mathématiques, les fonctions ou plus généralement, les applications sont partout. En analyse où elles permettent aisément d'obtenir des égalités ou inégalités, en algèbre où des applications peuvent transporter certaines propriétés, en probabilités où elles permettent de définir certaines lois. Vous l'avez compris, il faudra vite être à l'aise avec cette notion essentielle.

Exercice 1 On note encore ln la fonction logarithme népérien.

1. Etablir que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x) \leq 2(\sqrt{x} - 1)$.
2. Montrer alors que :
$$\frac{\ln(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
3. Fixons p, q deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Retrouver plus généralement que :
$$\frac{(\ln(x))^p}{x^q} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On parle souvent de ***croissances comparées*** *: à l'infini, les puissances des fonctions logarithmes sont toujours négligeables devant les puissances de x.*

Ce premier exercice n'est pas simple, et je vous invite à suivre sa résolution avec moi sur :



Pour vous entrainer

Exercice 2 On introduit ici les fonctions cosinus et sinus hyperboliques notées ch et sh, et définies sur $\mathbb{R}$ par :

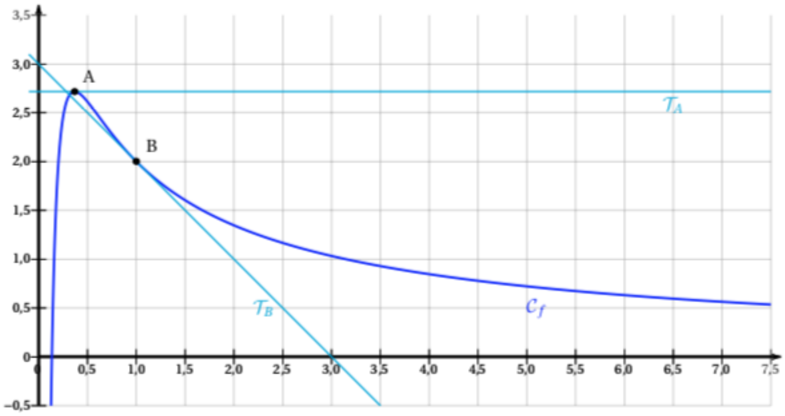
$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Justifier que ces fonctions sont bien dérivables sur $\mathbb{R}$ et établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$ch'(x) = sh(x) \text{ et } sh'(x) = ch(x)$$
2. Déterminer le signe de chacune des dérivées, puis dresser le tableau de variations des fonctions ch et sh sur $\mathbb{R}$.
Attention, on prendra soin de justifier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$, et on précisera la valeur en 0 dans chacun des tableaux.
3. Construire alors dans un même repère les courbes représentatives des fonctions ch et sh.

Exercice 3 Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$;
- la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}\ ;\ e\right)$;
- la tangente $\mathcal{T}_B$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\ ;\ 2)$.

La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\ ;\ 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 3)$.



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite $\mathcal{T}_B$.

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}.$$

3. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
4. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
5. Montrer que, pour tout $x \in]0\ ;\ \infty[$,
$$f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$
6. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
7. On note f'' la fonction dérivée seconde de f On admet que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$
$$f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$
Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.