Séance 1

Les suites réelles

Les suites réelles sont abordées très tôt au lycée. Elles nous permettent entre autres de modéliser, de façon discrète, des phénomènes d'évolution : on comprendra alors pourquoi il est important d'en connaître l'étude.
La recherche d'une définition explicite d'une suite, sa monotonie, son comportement asymptotique sont des informations très utiles et on essaiera le cas échéant de reconnaître les suites de référence et leurs propriétés : suites arithmétiques et géométriques.

En mathématiques, ces suites sont d'autant plus importantes qu'elles nous permettront aussi d'obtenir certaines propriétés algébriques ou topologiques, mais également de définir certains objets, vus comme limite d'une suite donnée. On veillera donc à en maitriser tout le vocabulaire et les définitions associées.

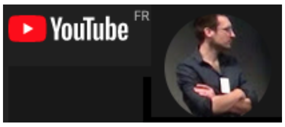
Exercice 1 On définit la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n^2})$$

c'est à dire : $u_n = \sin(\frac{1}{n^2}) + \sin(\frac{2}{n^2}) + \ldots + \sin(\frac{n}{n^2})$.

1. Etablir que pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Ce premier exercice n'est pas simple, et je vous invite à suivre sa résolution avec moi sur :



Pour vous entrainer

Exercice 2 On considère la suite arithmético-géométrique (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1 \end{cases}$$

1. Calculer les premiers termes de la suite.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = a_n - 2$$
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (b) En déduire l'expression de a_n en fonction de n, puis justifier que la suite (a_n) est convergente.

Exercice 3 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n$$

Etablir par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a en fait :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$