Chapitre 7

Fonctions polynômes et formules de Taylor

Depuis la classe de première, vous avez compris qu'une fonction dérivable pouvait localement être approchée par sa tangente. Les formules de Taylor qui seront présentées ici nous permettront de prolonger cette idée en approchant une fonction par des polynômes bien précis. C'est là un des moyens les plus efficaces pour étudier une fonction au voisinage d'un point, que ce soit pour en déterminer sa limite ou un équivalent.

Programmes 2021

Pour aller plus loin
Les différentes formules de Taylor sont très subtiles en analyse, mais on distinguera rapidement celles qui permettent d'obtenir des informations locales et celle qui, au contraire, nous donnera un résultat global à condition de conserver un reste intégral... c'est d'ailleurs comme cela qu'on obtient les principaux développements en série entière des fonctions usuelles.

1 Fonctions polynômes et formules de Taylor

1.1 Premières définitions et propriétés

Définition On appelle **fonction polynôme** d'une variable réelle à valeurs réelles toute fonction p définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ \text{ où pour tout } k \in [\![0, n]\!],\ a_k \in \mathbb{R}$$

En particulier,

- si tous les coefficients sont nuls, on dit que p désigne la **fonction polynôme nulle**;
- sinon, en notant encore a_n le coefficient non nul d'indice le plus élevé, on dit que la fonction p est de **degré** n et a pour **coefficient dominant** a_n.

Remarques

1. Si ici on travaillera dans $\mathbb{R}$, on peut aussi considérer des fonctions polynômes d'une variable complexe à valeurs complexes... c'est même très pratique car c'est souvent en se plongeant dans $\mathbb{C}$ qu'on arrive à sortir une factorisation de ces fonctions polynômes.
2. Dans le cas particulier où $a_n = 1$, on dit que le polynôme est **unitaire** et on conviendra que le **polynôme nul** a pour degré $-\infty$ de sorte que :

$$deg(p) \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$$

Propriété 1 (unicité de l'écriture polynomiale).

Soient $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, alors on a :

(i) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ p(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\, k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0$

(ii) et dans le cas où $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ p(x) = q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} n = m \\ \forall\, k \in [\![0, n]\!],\ a_k = b_k \end{cases}$$

On pourra donc retenir que deux fonctions polynômes sont égales si et seulement si elles ont le même degré et les coefficients associés sont égaux.

► *A chaque fois, on raisonne par double implication... le sens réciproque étant immédiat.*

Remarque Si on considère $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, alors les règles de calculs usuels nous permettent de formaliser la somme et le produit de p et q de sorte que :

- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = \sum_{k=0}^{max(n,m)} (a_k + b_k) x^k$, avec $\begin{cases} a_k = 0 \text{ si } k > n \\ b_k = 0 \text{ si } k > m \end{cases}$
- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ p(x) \times q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \times \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$, où les coefficients (c_k) vérifient pour tout $k \in [\![0, n+m]\!]$,

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i},\ \text{ avec } \begin{cases} a_k = 0 \text{ si } k > n \\ b_k = 0 \text{ si } k > m \end{cases}$$

Corollaire 2 (degré de la somme et du produit).

Soient p, q deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Alors, on a immédiatement :

(i) $deg(p) \neq deg(q) \Rightarrow deg(p+q) = max(deg(p), deg(q))$

(ii) $deg(p) = deg(q) \Rightarrow deg(p+q) \leq max(deg(p), deg(q))$

(iii) $deg(pq) = deg(p) + deg(q)$

Ces propriétés sur le degré sont très pratiques, car elles nous permettront entre autres d'obtenir des informations sur un polynôme cherché. C'est bien entendu le cas quand on raisonne par analyse-synthèse.

Exemple 1 Déterminer les fonctions polynômes p vérifiant l'égalité $p(x^2) = (x^2 + 1)p(x)$.

1.2 Règle de dérivation et opérations algébriques

Corollaire 3 (règle de dérivation).

Soit $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$. Alors, p est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et les règles classiques de dérivation nous donnent :

- pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $p^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n} a_k k(k-1)\dots(k-i+1)x^{k-i} = \sum_{k=i}^{n} a_k \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i}$,
- pour tout $i > n$, $p^{(i)}(x) = 0$.

Remarque Par convention, on a encore $p^{(0)} = p$ et avec les notations de la définition, on pourra retenir que la i-ième dérivée $p^{(i)}$ est encore une fonction polynôme de degré $n - i$ de sorte que : $p^{(n+1)} = 0$.

Propriété 4 (opérations algébriques).

Soient p, q deux fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Alors, on rappelle qu'on a :

(i) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda p + q)' = \lambda p' + q'$ et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(\lambda p + q)^{(n)} = \lambda p^{(n)} + q^{(n)}$$

(ii) $(pq)' = p'q + pq'$ et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(pq)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{(k)} q^{(n-k)} \ \textbf{(formule de Leibniz)}$$

► *On utilise les règles de dérivation classiques... mais on pourra procéder par récurrence pour justifier ces formules pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

1.3 Formules de Taylor et approximation locale

Théorème 5 (formule de Taylor avec reste intégral).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs réelles. On suppose que f est de classe C^{n+1} sur I et $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

La fonction polynôme définie par $T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\dfrac{(x-a)^k}{k!}$ désigne en fait le **polynôme de Taylor de degré n associé à la fonction f en a.**

► *On procède simplement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ dans laquelle on mettra en place une intégration par parties bien choisie...*

Corollaire 6 (inégalité de Taylor-Lagrange).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^{n+1} sur I et $a \in I$. Si de plus pour tout $x \in I$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$, alors on a l'inégalité :

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

► *Il suffit de majorer le reste intégral, mais on veillera à discuter la place de x par rapport à a.*

Corollaire 7 (formule de Taylor-Young).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs réelles. On suppose que f est de classe C^{n+1} sur I et $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + (x-a)^n \epsilon(x), \text{ avec } \epsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

▶ *Il s'agit alors d'une conséquence immédiate de la formule de Taylor-Lagrange...*

Remarques

1. De cette dernière formule, on peut en déduire que :

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| = |(x-a)^n \epsilon(x)| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

et ainsi, les polynômes de Taylor nous donnent une **approximation de la fonction f au voisinage de a**. On pourra donc retenir que toute fonction suffisamment régulière peut ainsi être approchée localement par une fonction polynôme, ce qui nous permettra *in fine* de mieux cerner le comportement d'une fonction donnée.

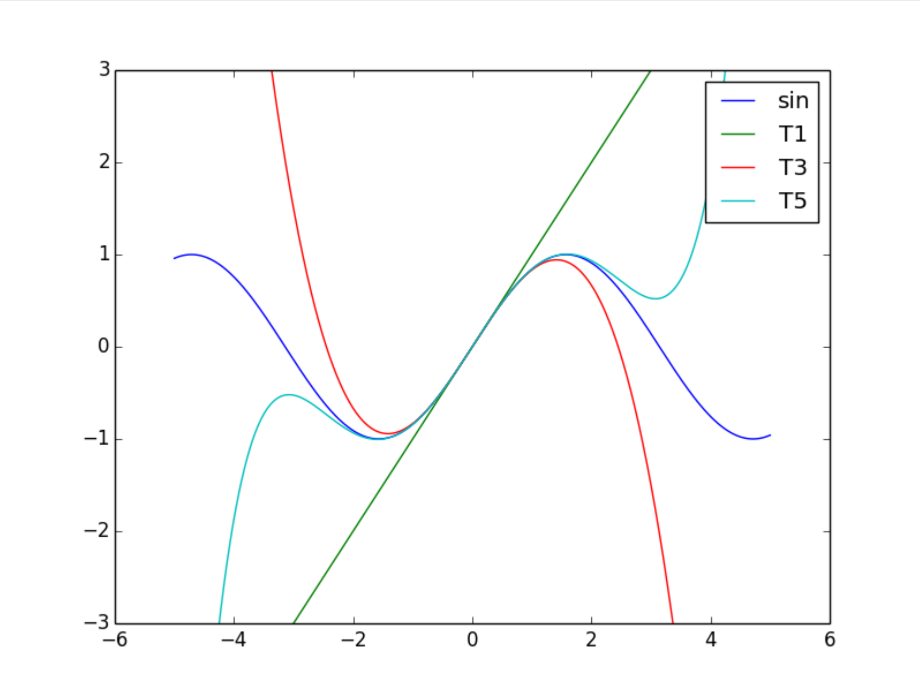
2. Attention, on pourra adapter cette dernière formule en fonction de nos besoins et ainsi, en utilisant les **notations de Landau** :

   - ou bien $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$
   - ou bien $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \underset{x \to a}{O}((x-a)^n)$

Exemple 2

1. Donner la formule de Taylor-Young pour la fonction sin en 0 à l'ordre 1, 3 et 5.

2. Dans le langage Python, construire un programme *taylor* qui pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ renvoie dans une même fenêtre, le graphe de la fonction sinus et de ses polynômes de Taylor à l'ordre 1, 3 et 5 sur le segment $[a, b]$.
   On n'hésitera pas à placer une légende de sorte que :



2 Calculs de développements limités et applications

2.1 Développements limités en un point

Théorème 8 (existence et unicité de la partie régulière).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs réelles. On suppose que f est de classe C^{n+1} sur I et $a \in I$. Alors, il existe une unique fonction polynôme p de degré inférieur ou égal à n telle que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = p(x-a) + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$$

Dans ce cas, on dit que f possède un **développement limité** à l'ordre n en a et on retiendra que la **partie régulière** n'est rien d'autre que son polynôme de Taylor à l'ordre n en a :

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$$

► *On procède par existence et unicité. L'existence est immédiate puisqu'il suffit d'invoquer la formule de Taylor-Young déjà démontrée pour une fonction de classe C^{n+1}.*

Corollaire 9 (cas particulier des fonctions paires ou impaires en 0).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur un intervalle I centré en 0 et à valeurs réelles. On suppose de plus que f est de classe C^{n+1} sur I. Alors :

(i) si f est paire, sa partie régulière en 0 ne comporte que des puissances paires ;

(ii) si f est impaire, sa partie régulière en 0 ne comporte que des puissances impaires.

► *Il suffit de comparer les parties régulières de $f(x)$ et $f(-x)$, et de conclure par unicité.*

2.2 Développements limités de référence

Propriété 10 (développements limités de référence en 0).

Les fonctions usuelles étant de classe C^∞ sur leur intervalle de définition, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^n)$
2. $\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
3. $\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
4. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
5. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
6. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$
7. En particulier, on peut en déduire pour $\alpha = -1$:
   - $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$
   - $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$

Remarque La plupart des développements limités seront donnés en 0, et on pourra s'y ramener par changement de variable lorsque ce n'est pas le cas. D'ailleurs, s'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra écrire des o sans préciser qu'on travaille au voisinage de 0.

Exemple 3

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$ de $\sin(x)$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x^3 + x + 1$.

2.3 Opérations algébriques

Propriété 11 (intégration d'un développement limité).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en $0 \in I$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + o(x^n)$.
Dans ce cas, si F est une primitive de f, on admet qu'elle possède un développement limité en 0 à l'ordre $n+1$ de la forme :

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} p_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$$

c'est à dire que pour obtenir sa partie régulière, il suffit de primitiver la partie régulière de f, sans oublier la constante.

En fait, ces opérations nous donnent un moyen d'obtenir des développements limités sans passer par le calcul des dérivées successives, mais à partir de développements connus.

Exemple 4 Déterminer le développement limité à l'ordre 6 en 0 de :

$$\ln(1+x),\ \ln(1-x),\ \arctan(x)$$

On pourra généraliser le résultat obtenu pour décrire le développement limité à l'ordre n de ces fonctions.

Propriété 12 (somme et produit de développements limités).

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f et g admettent un développement limité à l'ordre n en $0 \in I$:

$$f(x) = p(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) = q(x) + o(x^n)$$

Dans ce cas, on admet que :

(i) la combinaison linéaire $\lambda f + g$ possède un développement limité en 0 à l'ordre n de la forme :

$$(\lambda f + g)(x) = (\lambda p + q)(x) + o(x^n)$$

c'est à dire qu'il suffit de prendre la combinaison linéaire des parties régulières.

(ii) le produit fg possède un développement limité en 0 à l'ordre n de la forme :

$$(fg)(x) = Tronc(pq)(x) + o(x^n)$$

c'est à dire qu'il suffit de prendre le produit des parties régulières et de tronquer le résultat à l'ordre n.

Exemple 5 Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de $\sin(x)ch(x)$.

Propriété 13 (composée de développements limités).

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. On suppose que f et g admettent un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = p(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) = q(x) + o(x^n)$$

Si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ possède un développement limité en 0 à l'ordre n de la forme :

$$g \circ f(x) = Tronc(q \circ p)(x) + o(x^n)$$

c'est à dire qu'il suffit de composer les parties régulières et de tronquer le résultat à l'ordre n.

C'est d'ailleurs de cette façon qu'on ira chercher le développement limité d'un quotient... en se ramenant au développement limité en 0 de $\dfrac{1}{1+u}$:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \ldots + (-1)^n u^n + o(u^n)$$

Exemple 6

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de $\dfrac{1}{\cos(x)}$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 5 de $\tan(x)$.

3 Quelques exemples d'utilisation

Calcul d'un équivalent, d'une limite et dérivabilité en un point

Pour obtenir un équivalent ou une limite en un point, on pourra toujours aller chercher un développement limité à un ordre bien choisi... il ne faudra donc pas hésiter à élever l'ordre pour avoir un nombre de termes suffisant.

Exemple 7

1. Déterminer un équivalent en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$. En déduire que l'on peut prolonger f en une fonction continue en 0.

2. La fonction f ainsi prolongée est-elle de classe C^1 en 0 ?

Etude locale du signe d'une fonction et position relative par rapport à sa tangente

Si on obtient un équivalent au voisinage d'un point, il est alors très facile d'en déduire le signe de la fonction au voisinage de ce point: les développements limités seront alors très pratiques pour préciser la position relative d'une courbe et de sa tangente.

Exemple 8

1. Déterminer un équivalent en 0 de $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.

2. Représenter alors C_f dans un repère orthonormé ainsi que sa tangente en 0.

Etude des branches infinies

Pour étudier la nature des branches infinies, on peut aussi utiliser les développements à l'infini. Par exemple, il suffit de poser $x = 1/t$ afin d'aller chercher les développements limités de référence, et on parlera alors de **développement asymptotique** :

Exemple 9 Déterminer la nature de la branche infinie de $\sqrt{x^2 + x + 1}$ en $+\infty$.

Développement limité de la bijection réciproque

Si une fonction $f : I \to J$ réalise un C^n-difféomorphisme au voisinage d'un point a, on pourra alors obtenir un DL_n de f^{-1} au voisinage de $b = f(a)$. En fait, il suffira de vérifier qu'au voisinage de a, $f'(x) \neq 0$, puis on utilisera la relation $f^{-1} \circ f(x) = x$:

Exemple 10 On considère la fonction f définie par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Former le développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en 0, la bijection réciproque de f.