Chapitre 6

Résolution des équations différentielles linéaires

Depuis le début de l'année, nous avons été amenés à résoudre quelques équations fonctionnelles, c'est à dire des équations dont l'inconnue n'était rien d'autre qu'une fonction. De la même façon, on s'intéressera ici aux équations différentielles linéaires mettant en scène une combinaison linéaire d'une fonction et de ses dérivées.
Il est difficile d'appréhender ce genre d'équations, mais nous verrons comment résoudre ces équations dans des cas particuliers, et leur résolution vous permettra bien souvent de mieux comprendre l'évolution d'un système.

Programmes 2021

Pour aller plus loin
Ce chapitre désigne en fait une vraie application du chapitre précédent, car pour résoudre de telles équations différentielles, il faudra souvent être capable d'"intégrer" ces équations... Cependant, ces premiers exemples de résolution seront fondateurs et nous verrons plus tard que toute équation différentielle linéaire d'ordre n peut toujours se ramener à l'étude d'un système différentiel du premier ordre.

1 Généralités et forme générale des solutions

Dans tout ce chapitre, on pose pour toute fonction y à valeurs réelles ou complexes, on notera $y^{(k)}$ sa dérivée k-ième.

Définition Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** n toute équation de la forme :

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

où pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, a_i et b désignent des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $a_n \neq 0$.
En particulier, on peut considérer le cas particulier des équations différentielles du premier et du second ordre qu'on ramènera sous une des formes suivantes :

$$y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t) \text{ ou bien } y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

On dit alors que :

- $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ désigne une **solution** de l'équation différentielle si f est suffisamment dérivable sur I et vérifie l'équation donnée.
- f_1, f_2 désignent des **solutions linéairement indépendantes** si elles désignent deux solutions de l'équation qui ne sont pas proportionnelles, c'est à dire qu'il n'existe pas de constante permettant d'exprimer l'une des fonctions en fonction de l'autre.

Théorème 1 (forme générale des solutions).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre définie sur I par :

$$y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t) \text{ ou bien } y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

où pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, a_i et b désignent des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. De plus, on note S l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur I et S_0 l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $(\mathcal{E}_0)$:

$$y'(t) + a_0(t)y(t) = 0 \text{ ou bien } y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0$$

Alors, en notant f_p une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sur I, on a :

$$S = \{f : t \in I \longmapsto f_p(t) + h(t),\ h \in S_0\}$$

► *On traitera l'un des deux cas, puis il suffit de procéder par double inclusion.*

Remarque En physique ou en SI, vous serez d'abord amenés à résoudre des équations homogènes, c'est à dire des équations différentielles dans lesquelles il n'y a pas de second membre et dans ce cas, on parle plutôt de **régime libre** et on a évidemment :

$$S = S_0$$

Il sera donc inutile de rechercher une solution particulière f_p pour construire l'ensemble des solutions !

Dans les autres cas, on parle aussi de **régime forcé** et comme en maths, vous travaillerez en deux temps :

- on résout $(\mathcal{E}_0)$ sur l'intervalle de travail,
- puis on détermine une solution particulière f_p pour obtenir l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

Théorème 2 (de Cauchy-Lipschitz linéaire).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre définie sur I par :

$$y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t) \text{ ou bien } y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

En notant alors n l'ordre de l'équation différentielle, on admet qu'il existe une unique solution $f : I \to \mathbb{C}$ de $(\mathcal{E})$ vérifiant n conditions initiales données.

Remarque Ce théorème, admis également en deuxième année, est fondamental :

1. il nous permet d'affirmer qu'il existe toujours au moins une solution dans S, et celle-ci est même unique si on impose des conditions initiales.
2. il nous permet de préciser la dimension de S_0, c'est à dire qu'il nous permet de connaître le nombre de solutions indépendantes qui engendrent S_0. En particulier :
   - si on a $(\mathcal{E})$ $y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$, alors il existe $f_1 \in S_0$ et non nulle telle que $S_0 = Vect_{\mathbb{K}}(f_1)$.
   - si on a $(\mathcal{E})$ $y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$, alors il existe $f_1, f_2 \in S_0$ et indépendantes telles que $S_0 = Vect_{\mathbb{K}}(f_1, f_2)$.

   Ces solutions f_k sont aussi appelées **système fondamental de solutions**, au sens où toutes les autres solutions de S_0 s'exprimeront comme des combinaisons linéaires de ces fonctions.

2 Cas particulier des équations différentielles linéaires d'ordre 1

Propriété 3 (ensemble des solutions de l'équation homogène).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur I par :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

où a et b désignent des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, et dont on note $(\mathcal{E}_0)$ l'équation homogène associée.
Alors, en notant A une primitive de a sur I, on a :

$$S_0 = Vect_{\mathbb{C}}(f_1) \text{ avec } f_1 : t \in I \longmapsto e^{-A(t)}$$

► *On invoque Cauchy-Lipschitz : S_0 n'étant engendré que par une solution non nulle, il suffit de vérifier que f_1 est bien solution de S_0.*

Remarque Le résultat nous donne des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ suivant que l'on souhaite des solutions réelles ou complexes. Par exemple, si on ne cherche que des solutions à valeurs réelles, il suffira alors de restreindre l'ensemble des solutions à :

$$S_0 = Vect_{\mathbb{R}}(t \mapsto e^{-A(t)})$$

Exemple 1 On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad (1-t^2)y'(t) + 2ty(t) = 2t$$

Déterminer les solutions de l'équation homogène associée sur des intervalles qu'on précisera.

Propriété 4 (recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur I par :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

où a et b désignent des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, et dont on note $(\mathcal{E}_0)$ l'équation homogène associée.
Alors, il existe une solution particulière sous la forme $f_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$, et ainsi :

$$S = \{f : t \in I \longmapsto f_p(t) + \lambda e^{-A(t)},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$$

► *On cherche une solution particulière sous la forme donnée et on essaie d'identifier $\lambda'(t)$ dans l'équation différentielle.*

Pour déterminer l'ensemble des solutions, on a donc besoin d'une solution particulière f_p : la méthode précédente ne sera pas systématique mais elle s'appliquera quand aucune solution évidente ne se présentera.

Exemple 2 Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante sur des intervalles qu'on précisera :

$$(\mathcal{E}) \quad (1-t^2)y'(t) + 2ty(t) = 2t$$

Remarque Dans ce dernier cas, on aura donc un faisceau de solutions dépendant du choix de λ. Si on impose une condition initiale, on peut alors obtenir la valeur de λ correspondante : il existe ainsi une unique solution satisfaisant une condition initiale. On retrouve ici l'unicité du **théorème de Cauchy-Lipschitz**.

3 Cas particulier des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Propriété 5 (ensemble des solutions de l'équation homogène).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur I par :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, d une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, et dont on note $(\mathcal{E}_0)$ l'équation homogène associée.
Alors, en notant Δ le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, il vient :

- si $\Delta \neq 0$, alors l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes $(r_1, r_2) \in \mathbb{C}^2$, et dans ce cas :

$$S_0 = Vect_{\mathbb{C}}(f_1, f_2) \text{ avec } f_1 : t \in I \longmapsto e^{r_1 t}, f_2 : t \in I \longmapsto e^{r_2 t}$$

- si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique possède une solution double $r_0 \in \mathbb{C}$, et dans ce cas :

$$S_0 = Vect_{\mathbb{C}}(f_1, f_2) \text{ avec } f_1 : t \in I \longmapsto e^{r_0 t}, f_2 : t \in I \longmapsto te^{r_0 t}$$

► *On invoque encore Cauchy-Lipschitz, puis on vérifiera que les fonctions proposées sont bien des solutions indépendantes de $(\mathcal{E}_0)$.*

Remarque Dans le cas particulier où a, b, c sont réels, on peut évidemment appliquer ce résultat de sorte que :

- si $\Delta > 0$, alors $S_0 = Vect_{\mathbb{C}}(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t})$ et on pourra en extraire les solutions à valeurs réelles : $Vect_{\mathbb{R}}(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t})$.
- si $\Delta = 0$, alors $S_0 = Vect_{\mathbb{C}}(t \mapsto e^{r_0 t}, t \mapsto te^{r_0 t})$ et on pourra en extraire les solutions à valeurs réelles : $Vect_{\mathbb{R}}(t \mapsto e^{r_0 t}, t \mapsto te^{r_0 t})$.
- si $\Delta < 0$, alors on a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \overline{r_1}$ de sorte que :

$$S_0 = Vect_{\mathbb{C}}(t \mapsto e^{\alpha t}e^{i\beta t}, t \mapsto e^{\alpha t}e^{-i\beta t}) = Vect_{\mathbb{C}}(t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t), t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t))$$

Et ainsi, on pourra encore en extraire les solutions à valeurs réelles :

$$S_0 = Vect_{\mathbb{R}}(t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t), t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t))$$

Exemple 3 Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation homogène donnée :

1. $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 0$
2. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$
3. $y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$

Propriété 6 (recherche d'une solution particulière par la méthode de variation des constantes)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur I par :

$$(\mathcal{E}) \;\; ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, d une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et dont on note $(\mathcal{E}_0)$ l'équation homogène associée.

Alors, il existe une solution particulière sous la forme $f_p(t) = \lambda_1(t)f_1(t) + \lambda_2(t)f_2(t)$, avec f_1, f_2 les fonctions qui engendrent S_0 et λ_1, λ_2 telles que $\lambda_1'(t)f_1(t) + \lambda_2'(t)f_2(t) = 0$, et ainsi :

$$S = \{f : t \in I \longmapsto f_p(t) + \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t),\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\}$$

► *On cherche une solution particulière sous la forme donnée afin d'obtenir un système de deux équations en $\lambda_1'(t)$ et $\lambda_2'(t)$ et dont on vérifiera l'existence de solutions par le déterminant associé.*

Pour déterminer l'ensemble des solutions, on a donc besoin d'une solution particulière f_p : la méthode précédente ne sera pas systématique mais elle s'appliquera quand aucune solution évidente ne se présentera.

Exemple 4 Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \;\; y''(t) - y(t) = 4te^t$$

Remarques

1. Dans ce dernier cas, on aura donc autant de solutions que de choix des paramètres λ_1 et λ_2. Si on impose deux conditions initiales, on peut alors obtenir les valeurs correspondantes : il existe ainsi une unique solution satisfaisant ces conditions initiales. On retrouve ici l'unicité du **théorème de Cauchy-Lipschitz**.
2. La méthode de variation des constantes est assez lourde à mettre en place et la plupart du temps, on préfèrera observer le second membre pour voir si on ne peut pas anticiper la forme de la solution particulière.

Par exemple, si le second membre est de la forme $P(t)e^{mt}$, alors on peut trouver une solution particulière sous la forme $f_p(t) = Q(t)e^{mt}$ avec Q un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Malheureusement, il faudra adapter le degré du polynôme cherché en fonction de le valeur de m de sorte que :

- $deg(Q) = deg(P)$, si m n'est pas solution de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$;
- $deg(Q) = deg(P) + 1$, si m est une solution simple de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$;
- $deg(Q) = deg(P) + 2$, si m est solution double de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.

Exemple 5 Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \;\; y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t^2e^{-t}$$