Chapitre 5

Intégration sur un segment

L'année dernière, vous avez travaillé sur la notion d'intégrale. Nous allons ici redéfinir en toute rigueur ce que désigne l'intégrale d'une fonction continue par morceaux à l'aide d'une classe de fonctions particulières : les fonctions en escalier.
On pourra alors redémontrer les principales propriétés de l'intégrale et mener nos premiers calculs grâce au théorème fondamental de l'analyse.

1 Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux **2**
- 1.1 Fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux 2
- 1.2 Des fonctions en escalier à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux . 2
- 1.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux 3

2 Cas particulier des fonctions continues **4**
- 2.1 Théorème fondamental de l'analyse 4
- 2.2 Intégration par parties et changement de variable 6

3 Prolongements de la notation intégrale **7**
- 3.1 Intégrale d'une fonction à valeurs complexes 7
- 3.2 Intégrale d'une fonction définie sur un intervalle quelconque 8

Programmes 2021

Pour aller plus loin
Ce chapitre est fondamental, car il donnera naissance à de nombreux problèmes mathématiques que ce soit dans l'étude de suites d'intégrales ou tout simplement l'étude d'intégrales à paramètre... d'autant plus, que cette notion d'intégrale pourra aussi être généralisée à tout intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

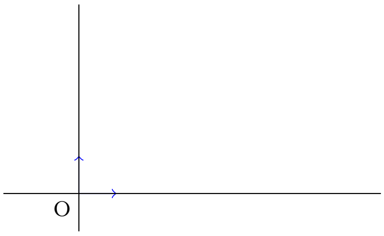
1.1 Fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux

Définitions Soit f une fonction définie sur un segment $[a,b]$ à valeurs réelles.

- On dit que f est une **fonction en escalier** s'il existe une **subdivision** $s = (x_i)$ du segment $[a,b]$ vérifiant :

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

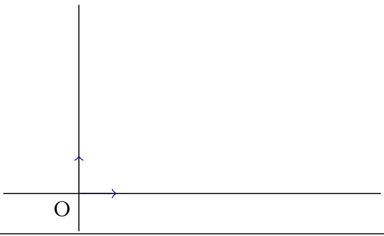
et telle que f soit constante sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$:



- On dit que f est une **fonction continue par morceaux** s'il existe une **subdivision** $s = (x_i)$ du segment $[a,b]$ vérifiant :

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

et telle que f soit continue sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$:



Remarques

1. De telles subdivisions du segment $[a,b]$ sont dîtes **adaptées à** f. D'ailleurs, on pourra toujours construire une subdivision **plus fine** en ajoutant un nombre fini de points. Ainsi,
   - si s et t désignent des subdivisions adaptées à f et g, alors la subdivision $s \cup t$ est simultanément adaptée à f et g.
   - l'aire des rectangles définis par une fonction en escalier ne dépend pas du nombre de points de la subdivision adaptée, et donc est indépendant de la subdivision elle-même.
2. Dans le cas particulier où on définit une subdivision (x_i) vérifiant : $\forall\ i \in [\![0,n]\!],\ x_i = a + i(\frac{b-a}{n})$, on dit qu'il s'agit d'une **subdivision à pas constant** $h = \frac{b-a}{n}$.

1.2 Des fonctions en escalier à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition Soit ϕ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et (x_i) une subdivision adaptée. On appelle **intégrale de la fonction en escalier** ϕ la somme des aires algébriques des rectangles définis par ϕ, c'est à dire :

$$I_{[a,b]}(\phi) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\phi_i \text{ , avec } \phi_i \text{ la valeur de } \phi \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra noter simplement $I(\phi)$.

Corollaire 1 (propriétés immédiates)**.**

Soient ϕ, ψ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$. Alors, on peut vérifier que :

(i) l'intégrale est linéaire : $\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ I(\lambda\phi + \psi) = \lambda I(\phi) + I(\psi)$

(ii) l'intégrale est croissante : $\phi \leq \psi \Rightarrow I(\phi) \leq I(\psi)$

(iii) l'intégrale en valeur absolue peut être majorée : $|I(\phi)| \leq I(|\phi|)$

(iv) l'intégrale vérifie la relation de Chasles : $\forall\ c\ \in]a,b[,\ I_{[a,c]}(\phi) + I_{[c,b]}(\phi) = I_{[a,b]}(\phi)$

► *En prenant à chaque fois une subdivision adaptée aux fonctions en escalier considérées, on revient à la définition de l'intégrale comme la somme des aires algébriques des rectangles définies par ces fonctions en escalier.*

Définition Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles, et notons $\mathcal{E}_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$. On appelle **intégrale de f sur le segment** $[a,b]$ le nombre réel défini par :

$$\int_a^b f = \sup I_-(f) = \inf I_+(f)$$

où $I_-(f)$ et $I_+(f)$ désignent les ensembles $I_-(f) = \{I(\phi),\ \phi \in \mathcal{E}_{[a,b]},\ \phi \leq f\}$ et $I_+(f) = \{I(\psi),\ \psi \in \mathcal{E}_{[a,b]},\ \psi \geq f\}$.

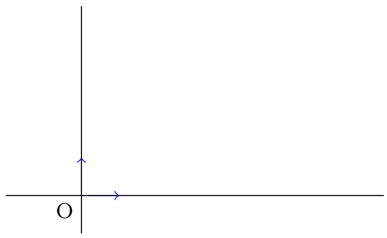
Remarques

1. Cette intégrale pourra aussi être notée $\int_{[a,b]} f$, mais la plupart du temps, on préfèrera une notation plus symbolique :

$$\int_a^b f(t)\ dt, \text{ où } t \text{ désigne une variable muette}$$

2. De la même façon que pour les fonctions en escalier, on peut remarquer que l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ représente l'**aire algébrique du domaine** définie par la courbe associée. Et en particulier, si f désigne une fonction constante de valeur λ, alors :

$$\int_a^b f(t)\ dt = I(f) = \lambda(b-a)$$



3. Par convention, on pose : $\displaystyle\int_b^a f(t)\ dt = -\int_a^b f(t)\ dt$ de sorte qu'on a immédiatement $\displaystyle\int_a^a f(t)\ dt = 0$.

Corollaire 2 (conséquences de la définition).

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Alors :

(i) $\forall\ (\phi,\psi) \in (\mathcal{E}_{[a,b]})^2,\ \phi \leq f \leq \psi \Rightarrow I(\phi) \leq \int_a^b f(t)\ dt \leq I(\psi)$

(ii) il existe (ϕ_n) et (ψ_n) des suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \phi_n \leq f \leq \psi_n$ avec :

$$I(\phi_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\ dt \text{ et } I(\psi_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\ dt$$

► *Le premier point est immédiat par définition de l'intégrale. Pour le second, il suffit d'appliquer la caractérisation séquentielle de la borne supérieure et de la borne inférieure.*

Remarque Cette dernière propriété nous permettra en outre de voir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux comme la limite d'une suite d'intégrales de fonctions en escalier.

1.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Propriété 3 (linéarité de l'intégrale).

Soient f,g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\ dt = \lambda \int_a^b f(t)\ dt + \int_a^b g(t)\ dt$$

► *On fera intervenir la caractérisation séquentielle de la borne supérieure et inférieure obtenue dans le corollaire.*

Propriété 4 (croissance de l'intégrale).

Soient f,g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles telles que $f \leq g$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\ dt \leq \int_a^b g(t)\ dt$$

▶ *On fera intervenir la caractérisation séquentielle de la borne supérieure et inférieure obtenue dans le corollaire.*

Remarque On en déduit immédiatement : $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)\, dt \geq 0$ ou encore $f \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)\, dt \leq 0$.

Propriété 5 (majoration de la valeur absolue).

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Alors pour $a \leq b$, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

▶ *On utilise la propriété précédente à partir de l'encadrement :* $-|f| \leq f \leq |f|$.

Propriété 6 (relation de Chasles).

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Alors pour tout $c \in D_f$ tel que $a < c < b$:

$$\int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$$

▶ *On fera intervenir la caractérisation séquentielle de la borne supérieure et inférieure obtenue dans le corollaire.*

Remarque Avec la convention $\displaystyle\int_b^a f(t)\, dt = -\int_a^b f(t)\, dt$, on peut naturellement prolonger cette relation de Chasles à tout réel $c \in D_f$ et on pourra retenir :

$$\forall\, c \in D_f,\ \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$$

Exemple 1 On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \leq S_n$, puis montrer que la série (S_n) est divergente.

2 Cas particulier des fonctions continues

Si les fonctions constantes peuvent être vues comme des fonctions en escalier particulières, les fonctions continues peuvent aussi être vues comme des fonctions continues par morceaux particulières, comme des fonctions continues en un seul morceau. Ainsi, on pourra retenir que toutes les propriétés énoncées (linéarité, croissance, majoration de la valeur absolue et relation de Chasles) s'appliqueront sans difficulté aux fonctions continues à valeurs réelles.

2.1 Théorème fondamental de l'analyse

Définition Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F de classe C^1 sur I telle que :

$$F' = f$$

Propriété 7 (immédiate).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On rappelle que toutes les primitives de f sont égales à une constante près.

▶ *Notons* F, G *deux primitives quelconques, il suffit de montrer que la différence* $F - G$ *est constante...*

Propriété 8 (existence et unicité de la primitive d'une fonction continue satisfaisant une condition initiale).

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors, f admet une unique primitive F_a qui s'annule en a définie par :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

On dit aussi que F_a désigne une **intégrale dépendant de sa borne supérieure**.

▶ *On procède par existence-unicité. Pour l'existence, on se ramène à l'étude du taux d'accroissement en un point* $x_0 \in I$ *et on vérifie que* $F_a'(x_0) = f(x_0)$.

Remarques

1. Il faudra donc traiter ces intégrales dépendant de leur borne supérieure comme des fonctions à part entière telles que :
$$F_a' = f \text{ et } F_a(a) = 0$$
2. Cela nous donne en fait un moyen assez simple de définir une primitive : au lieu de nommer F une primitive de f, on peut aussi considérer $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ la primitive de f qui s'annule en a.

Théorème 9 (intégrale nulle d'une fonction continue de signe constant).

Soit f une fonction continue et de signe constant sur $[a, b]$. Alors :
$$\int_a^b f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow f \text{ est nulle sur } [a, b]$$

▶ *On procède par double-implication. Pour le sens direct, on pourra introduire F_a et étudier sa monotonie sur $[a, b]$.*

Théorème 10 (fondamental de l'analyse).

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors,
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b \text{ , avec } F \text{ une primitive quelconque de } f$$

▶ *Si F est une primitive quelconque, elle est de la forme $F_a + C$ et le résultat est immédiat.*

Remarque Le théorème fondamental de l'analyse est très utile... à condition de pouvoir se ramener à des primitives connues. Généralement, on retrouve les primitives des fonctions usuelles en "remontant" le tableau des dérivées :

On considère f définie par $f(x) = \dots$	alors f est dérivable sur $I = \dots$	et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dots$
x^α $(x > 0, \alpha \neq -1)$	$]0, +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln\lvert x\rvert$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$ $(x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\})$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\text{cotan}(x)$ $(x \in \mathbb{R} - \{k\pi\})$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \text{cotan}^2(x))$
$\text{sh}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$ch(x)$
$\text{ch}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$sh(x)$
$\text{th}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)$
$\text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\text{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ $(x \geq 1)$	$]1, +\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\text{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$ $(-1 < x < 1)$	$]-1, 1[$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arcsin(x)$ $(-1 \leq x \leq 1)$	$]-1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$ $(-1 \leq x \leq 1)$	$]-1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Et pour déterminer d'autres primitives, on essaiera alors de reconnaître la dérivée d'une fonction composée usuelle :

si f est de la forme...	alors f' sera de la forme...
u^α $(\alpha \neq -1)$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
e^u	$u' e^u$
$\ln\|u\|$	$\dfrac{u'}{u}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$1/u$	$-u'/u^2$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\mathrm{argsh}(u)$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
$\mathrm{argch}(u)$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$\mathrm{argth}(u)$	$\dfrac{u'}{1-u^2}$
$\arcsin(u)$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos(u)$	$-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arctan(u)$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$

Exemple 2 Déterminer les primitives de : $\dfrac{1}{x\ln(x)}$, $\cos^4(x)$ et $\ln(x)$.

Dans le cas particulier des fonctions rationnelles, on essaiera d'abord de transformer l'expression donnée en éléments simples. Par exemple, si on considère la fonction rationnelle F à coefficients réels avec un polynôme du second degré à discriminant négatif :

$$F(x) = \frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)(dx+e)^2(fx+g)} \Rightarrow F(x) = Q(x) + \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{ax^2+bx+c} + \frac{\beta_2}{(dx+e)^2} + \frac{\beta_3}{dx+e} + \frac{\beta_4}{fx+g}$$

où $Q(x)$ désigne le quotient dans la division euclidienne de $P(x)$ par son dénominateur.

Exemple 3 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-5t+6}\,dt\ ,\quad \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,dt\ ,\quad \int_0^1 \frac{1}{(t^2-t+1)(t+1)}\,dt$$

2.2 Intégration par parties et changement de variable

Propriété 11 (formule d'intégration par parties)**.**

Soient f, g deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors, on a la formule :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

► *Il suffit d'intégrer la dérivée du produit fg sur $[a,b]$...*

Exemple 4 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^x \arctan(t)\,dt\ ,\quad \int_0^x \sin(t)e^{-t}\,dt$$

Propriété 12 (formule de changement de variable)**.**

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et ϕ une fonction de classe C^1 telle que $\phi(c)=a, \phi(d)=b$. Alors, le **changement de variable** $t=\phi(u)$ nous donne :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^d f\circ\phi(u).\phi'(u)\,du$$

► *Si F désigne une primitive de f sur $[a,b]$, alors on a $F\circ\phi$ une primitive qui nous permettra d'aller chercher la seconde intégrale.*

Exemple 5 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt \ , \ \int_1^2 e^{\sqrt{t}}\, dt$$

Corollaire 13 (périodicité et parité).

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(i) Si de plus f est périodique de période T, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\, dt \ , \ \int_a^{a+T} f(t)\, dt = \int_b^{b+T} f(t)\, dt$$

(ii) Si de plus f est une fonction paire, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2\int_0^a f(t)\, dt$$

(iii) Si de plus f est une fonction impaire, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0$$

▶ *On posera à chaque fois le bon changement de variable...*

Lorsqu'on cherche à mettre en place un changement de variable, il n'y a pas en général de méthodes pour définir celui-ci. Cependant, dans certains cas, si la fonction possède certaines caractéristiques, il y a des réflexes à adopter.

Par exemple, si on souhaite calculer $\int_a^b f(\cos(t), \sin(t))\, dt$, on pourra suivre les **règles de Bioche** :

- si l'**intégrande** $f(\cos(t), \sin(t))\, dt$ est invariable quand on change t en $-t$, on pose $u = \cos(t)$;
- si l'**intégrande** $f(\cos(t), \sin(t))\, dt$ est invariable quand on change t en $\pi - t$, on pose $u = \sin(t)$;
- si l'**intégrande** $f(\cos(t), \sin(t))\, dt$ est invariable quand on change t en $\pi + t$, on pose $u = \tan(t)$.

Et dans le pire des cas, on pourra toujours se ramener à l'expression des fonctions trigonométriques en fonction de la **tangente de l'angle moitié**, c'est à dire en posant $u = \tan(\frac{t}{2})$, on a :

$$(i) \quad \cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad (ii) \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2} \qquad (iii) \quad \tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}$$

Exemple 6 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)(1+\tan(t))}\, dt$.

3 Prolongements de la notation intégrale

3.1 Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Pour finir, on peut aussi définir l'intégrale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes, et ceci en se ramenant aux fonctions partie réelle et imaginaire.

Définition Si on note $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ qu'on suppose continue, alors on définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par :

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b Re(f)(t)\, dt + i\int_a^b Im(f)(t)\, dt$$

et ainsi, on pourra retenir que :

$$Re(\int_a^b f(t)\, dt) = \int_a^b Re(f)(t)\, dt \ \text{ et } \ Im(\int_a^b f(t)\, dt) = \int_a^b Im(f)(t)\, dt$$

Théorème 14 (fondamental de l'analyse).

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs complexes. Alors, on a encore :

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b \text{ , avec } F \text{ une primitive quelconque de } f$$

▶ *Si F est une primitive quelconque de f, alors ses parties réelle et imaginaire définissent des primitives de $Re(f)$ et $Im(f)$, ce qui nous permettra de prouver l'égalité.*

Exemple 7 Calculer l'intégrale : $\int_0^\pi e^t \cos(2t)\ dt$.

Remarques

1. Cette dernière méthode est très pratique : elle nous évite en effet de mener deux intégrations par parties. On retiendra qu'elle repose sur le théorème fondamental de l'analyse, car on connaît ici une primitive de $t \longmapsto e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}^*$.

2. L'intégrale d'une fonction à valeurs complexes est encore linéaire et on pourra ainsi prolonger certaines propriétés de l'intégrale à l'exception de la croissance de l'intégrale :

Propriété 15 (relation de Chasles)**.**

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs complexes. Alors pour tout $c \in D_f$:

$$\int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt$$

▶ *Il suffit de revenir à la définition d'une fonction à valeurs complexes, le reste découle des propriétés de l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles.*

Propriété 16 (majoration du module)**.**

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs complexes. Alors pour $a \leq b$, on a :

$$|\int_a^b f(t)\ dt| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$$

▶ *Si l'intégrale est nulle, c'est immédiat. Sinon, on pose* $\int_a^b f(t)\ dt = re^{i\theta}$ *et on travaille avec* $\int_a^b Re(e^{-i\theta} f(t))\ dt$*...*

Propriété 17 (formule d'intégration par parties)**.**

Soient f, g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$ à valeurs complexes. Alors, on a encore la formule :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\ dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\ dt$$

▶ *On vérifie que la formule de dérivation du produit fg est encore valable pour les fonctions à valeurs complexes avant d'intégrer.*

3.2 Intégrale d'une fonction définie sur un intervalle quelconque

Nous avons ainsi étudié les principales propriétés de l'intégrale d'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il est d'ailleurs possible de généraliser cette notion d'intégrale sur un intervalle quelconque : on parlera alors d'**intégrales généralisées** ou **intégrales impropres**.

Définition Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Sous réserve d'existence, on appelle **intégrale généralisée de f sur I** l'intégrale :

$$\int_I f(t)\ dt$$

En particulier, si $I = [a, b[$ avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$, alors on dit que :

- l'intégrale généralisée de f est **convergente** si $\lim_{x \to b, x<b} \int_a^x f(t)\ dt$ est finie, et on notera encore $\int_a^b f(t)\ dt$ cette limite.

- sinon, on dit que l'intégrale généralisée de f est **divergente**.

De la même façon, on peut adapter la définition et définir une intégrale convergente (ou divergente) lorsque $I =]a, b]$ ou $]a, b[$.

Remarque On fera attention car certaines intégrales généralisées peuvent présenter de fausses singularités. C'est le cas notamment des fonctions prolongeables par continuité... car une fois prolongée, on a simplement l'intégrale d'une fonction continue sur un segment qu'on peut théoriquement calculer à l'aide du théorème fondamental de l'analyse.

Par définition, vérifier si une intégrale est convergente revient donc à calculer une intégrale "à cran fini", c'est à dire qu'**on se ramène sur un segment, avant d'en déterminer la limite éventuelle**.

Exemple 8 Montrer que ces intégrales sont convergentes :

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\ dt\ ,\ \int_0^1 \ln(t)\ dt \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt$$