Chapitre 4

Nombres complexes et applications

Depuis le début d'année, nous avons travaillé sur les fonctions usuelles : travail sur les inégalités, représentation graphique, comportement limite... D'ailleurs, toutes les techniques algébriques utilisées provenaient des propriétés du corps des nombres réels.
Dans ce chapitre, nous définirons l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes qui nous permettra de résoudre de nouveaux problèmes d'analyse en voyant $\mathbb{R}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Programmes 2021

Pour aller plus loin
Ce chapitre peut donc être traité sous plusieurs angles, géométrique, algébrique mais aussi pour toutes ses applications à l'analyse. C'est d'ailleurs parce qu'on ne peut pas résoudre certaines équations dans $\mathbb{R}$, qu'on introduit le corps des nombres complexes, et ainsi on se plongera souvent dans $\mathbb{C}$ ne serait-ce que pour obtenir une racine d'un polynôme donné : c'est le théorème de D'Alembert-Gauss.

1 Le corps des nombres complexes

1.1 Présentation et structure algébrique

Définition On appelle ensemble des **nombres complexes** noté $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres $\{a+ib,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$, avec i un élément qui vérifie $i^2=-1$. Dans cet ensemble, on définit deux opérations :

- une loi $+$ par : $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$
- une loi $\times$ par : $(a+ib)\times(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$

Remarque Ces deux lois $+$ et $\times$ prolongent naturellement les opérations dans $\mathbb{R}$ et elles nous permettront de mener des calculs en toute simplicité.

Théorème 1 (structure algébrique).

Muni de ces deux opérations $+$ et $\times$, on constate que $\mathbb{C}$ constitue un sur-ensemble de $\mathbb{R}$ pour lequel :

- la loi $+$ est une **loi de composition interne** :

$$\forall\,(z,z') \in \mathbb{C}^2,\ z+z' \in \mathbb{C}$$

  et elle vérifie :

$$\begin{cases}\text{cette loi est \textbf{associative} : } \forall\,(z,z',z'') \in \mathbb{C}^3,\ z+(z'+z'')=(z+z')+z'' \\ \text{cette loi possède un \textbf{élément neutre} } 0 : \forall\, z \in \mathbb{C},\ z+0=0+z=z \\ \text{tout élément admet un \textbf{symétrique} par cette loi, qu'on appelle \textbf{opposé} : } \forall\, z \in \mathbb{C},\ \exists\, z' \in \mathbb{C},\ z+z'=z'+z=0 \\ \text{cette loi est \textbf{commutative} : } \forall\,(z,z') \in \mathbb{C}^2,\ z+z'=z'+z\end{cases}$$

- la loi $\times$ est encore une **loi de composition interne** :

$$\forall\,(z,z') \in \mathbb{C}^2,\ z\times z' \in \mathbb{C}$$

  et elle vérifie :

$$\begin{cases}\text{cette loi est encore \textbf{associative} : } \forall\,(z,z',z'') \in \mathbb{C}^3,\ z\times(z'\times z'')=(z\times z')\times z'' \\ \text{cette loi possède encore un \textbf{élément neutre} } 1 : \forall\, z \in \mathbb{C},\ z\times 1=1\times z=z \\ \text{cette loi est \textbf{distributive} : } \forall\,(z,z',z'') \in \mathbb{C}^3,\ z\times(z'+z'')=z\times z'+z\times z'' \text{ et } (z+z')\times z''=z\times z'+z'\times z''\end{cases}$$

- la loi $\times$ vérifie enfin :

$$\begin{cases}\text{tout élément non nul admet un \textbf{symétrique} par cette loi, qu'on appelle \textbf{inverse} : } \forall\, z \in \mathbb{C}^*,\ \exists\, z' \in \mathbb{C},\ z\times z'=z'\times z=1 \\ \text{cette loi est aussi \textbf{commutative} : } \forall\,(z,z') \in \mathbb{C}^2,\ z\times z'=z'\times z\end{cases}$$

On résume alors ces propriétés en disant simplement que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un **corps commutatif**.

Corollaire 2 (intégrité de $\mathbb{C}$).

On note encore $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Alors, $\mathbb{C}$ est **intègre** de sorte que :

$$\forall\, z,z' \in \mathbb{C},\ zz'=0 \Leftrightarrow z=0 \text{ ou } z'=0$$

Remarques

1. On fera très attention, car contrairement à $\mathbb{R}$, le corps des nombres complexes n'est pas ordonné.
2. On peut naturellement prolonger certaines propriétés des lois usuelles, et on retrouvera notamment les mêmes règles de calcul sur les puissances entières :

$$\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \forall\,(z,z') \in \mathbb{C}^2,\ z^n z^m=z^{n+m},\ (z^n)^m=z^{nm},\ (zz')^n=z^n z'^n,\ \text{et avec } z\neq 0,\ \frac{z^n}{z^m}=z^{n-m}$$

   et de nombreuses formules utiles en analyse.

Propriété 3 (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique).

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a encore pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} n+1 \text{ , si } z=1 \\ \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} \text{ , sinon}\end{cases}$$

► *On discute les cas et on procède encore par réucurrence sur $n \in \mathbb{N}$ pour $z \neq 1$.*

Propriété 4 (formule de factorisation).

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a encore pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2) \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-1-k}$$

▶ *On part du membre de droite et après avoir distribué les termes, on fait apparaître un télescopage...*

Définition Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On appelle **coefficient binomial d'indices** k **et** n le nombre réel noté C_n^k ou $\binom{n}{k}$ défini par:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Corollaire 5 (propriétés immédiates).

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On a en particulier :

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(ii) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(iii) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

▶ *Il suffit à chaque fois de revenir à cette définition à l'aide de la notation factorielle.*

Propriété 6 (formule du triangle de Pascal).

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$. Alors, on a la relation : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

▶ *On revient à la définition des coefficients binomiaux.*

Remarque On peut alors retrouver le **triangle de Pascal** qui nous donne une lecture rapide des premiers coefficients binomiaux :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$\dots$		
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
n	1	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$			$\dots$	1	
$n+1$	1		$\binom{n+1}{k+1}$				$\dots$	1

Propriété 7 (formule du binôme de Newton).

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k$$

▶ *On procède encore par récurrence sur n, dans laquelle on fera des changements d'indice pour regrouper les sommes obtenues.*

Exemple 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Remarque C'est cette même formule qui nous permet d'obtenir les **identités remarquables**, et on pourra calculer facilement le développement de $(a+b)^3$, $(a+b)^4$...

1.2 Ecriture algébrique d'un nombre complexe

Théorème 8 (existence et unicité de l'écriture algébrique)**.**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$.
On dit alors que z a pour **écriture algébrique** $a + ib$ et les réels a et b seront appelés respectivement la **partie réelle** de z notée $Re(z)$ et la **partie imaginaire** de z notée $Im(z)$.

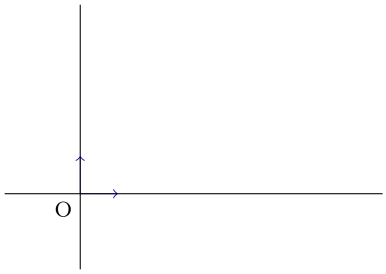
► *L'existence est immédiate par définition de l'ensemble $\mathbb{C}$. On prouvera l'unicité en supposant que s'il existe deux tels couples, alors nécessairement, ils sont égaux.*

Remarque Avec les notations précédentes, on dit encore que z désigne un **nombre réel** si $b = 0$, et que z désigne un **nombre imaginaire** si $a = 0$. Dans ce dernier cas, on pourra noter $z \in i\mathbb{R}$.

Interprétation géométrique L'existence et l'unicité de l'écriture algébrique nous permet d'affirmer que l'application :

$$\phi : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto a + ib \in \mathbb{C}$$

réalise en fait une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$. On pourra alors identifier le **plan complexe** au plan usuel muni d'un repère orthonormé :



Ainsi, à tout complexe $z = a + ib$, il existe un unique point M de coordonnées (a, b). On dit que z désigne l'**affixe du point** M, ou encore que M représente le **point image** associé à z, et on écrit : $M(z)$.
De la même façon, on peut aussi lui associer un unique vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (a, b), et ainsi z désigne aussi l'**affixe du vecteur** $\overrightarrow{OM}$. En particulier, si $z' = a' + ib'$ représente l'affixe d'un autre vecteur $\overrightarrow{OM'}$, alors :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} \text{ aura pour affixe } z' - z$$

Corollaire 9 (première caractérisation de l'égalité de deux nombres complexes)**.**

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors,

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$$

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = a - ib$.

Propriété 10 (du conjugué)**.**

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

$$(i)\ \ \overline{\overline{z}} = z \quad (ii)\ \ \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad (iii)\ \ \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \quad (iv)\ \ \text{si de plus } z' \neq 0,\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

► *Il suffit à chaque fois de revenir à l'écriture algébrique des nombres complexes donnés.*

Propriété 11 (caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide du conjugué)**.**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors on a immédiatement :

$$(i)\ \ Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad (ii)\ \ Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} \quad (iii)\ \ z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z \quad (iv)\ \ z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$$

Exemple 2 Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$. Montrer que $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, puis en déduire que si $z \neq 1$, alors $\dfrac{1 + z}{1 - z} \in i\mathbb{R}$.

2 Module et argument d'un nombre complexe

2.1 Définition et premières propriétés

Définition Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **module** de z le nombre réel noté $|z|$ et défini par :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Remarque Dans le cas particulier où $z \in \mathbb{R}$, on retrouve la valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$.

Théorème 12 (existence et unicité de l'écriture trigonométrique)**.**

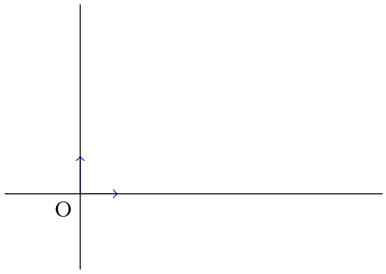
Soit $z \in \mathbb{C}$ qu'on suppose non nul. Alors, il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tel que :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

de sorte qu'on a immédiatement $r = |z|$. Cette dernière écriture est appelée la **forme trigonométrique** de z.

▶ *Après factorisation, on introduit, dans la plan usuel, le point image $M(\frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|})$ appartenant au cercle de centre 0 et de rayon 1.*

Interprétation géométrique On en déduit en particulier que tout nombre complexe non nul peut être défini par la donnée de son module et de son "angle à l'origine" où :



Remarque Les fonctions cos et sin étant 2π-périodiques, on peut ainsi prendre d'autres valeurs pour l'angle associé du moment qu'il représente le même point du cercle trigonométrique.

Définition Soit $z \in \mathbb{C}$ qu'on suppose non nul. On appelle alors **argument** de z n'importe quelle valeur réelle θ telle que :

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Un tel argument sera noté $Arg(z)$ et cette dernière écriture désignera une autre **forme trigonométrique** possible de z.

Corollaire 13 (seconde caractérisation de l'égalité de deux nombres complexes)**.**

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ non nuls. Alors :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ Arg(z) = Arg(z') \quad [2\pi] \end{cases}$$

On pourra encore évoquer l'"unicité" de l'écriture trigonométrique.

Propriété 14 (du module et de l'argument)**.**

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ qu'on suppose non nuls et d'écriture trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$, avec $(r, r') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Alors :

(i) $\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ de sorte que : $|\overline{z}| = |z|$ et $Arg(\overline{z}) = -Arg(z) \quad [2\pi]$

(ii) $zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$ de sorte que :

$$|zz'| = |z||z'| \text{ et } Arg(zz') = Arg(z) + Arg(z') \quad [2\pi]$$

(iii) et si de plus $z' \neq 0$, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}(\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta'))$ de sorte que :

$$|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ et } Arg(\frac{z}{z'}) = Arg(z) - Arg(z') \quad [2\pi]$$

▶ *On part simplement de la définition des complexes sous forme trigonométrique et par "unicité" de l'écriture, on retrouvera ces égalités.*

Propriété 15 (autres propriétés du module).

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$(i) \ \ |z| \geq 0 \text{ et } |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad (ii) \ \ |Re(z)| \leq |z| \text{ et } |Im(z)| \leq |z|$$

► *On revient bien évidemment à l'écriture algébrique associée, mais on veillera à soigner la première équivalence et on n'hésitera pas à faire intervenir le carré du module.*

Propriété 16 (inégalité triangulaire et inégalité triangulaire inversée).

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

En particulier, on a l'égalité : $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow z' = 0$ ou $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ z = \alpha z'$.

► *On part une fois encore de la définition et on essaie de majorer le module au carré par une identité remarquable... Pour le cas d'égalité, il suffira alors de discuter autour de cette fameuse majoration.*

Remarques

1. On pourra aussi, si cela nous arrange, réécrire cette inégalité de la façon suivante : $||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$.
2. On reconnaît les différentes propriétés d'une norme : le module est bien une **norme** sur $\mathbb{C}$.

Propriété 17 (caractérisation des réels et des imaginaires purs).

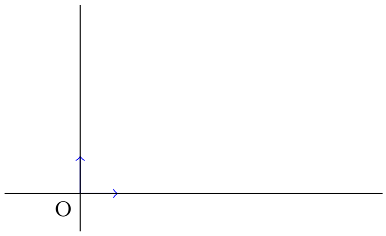
Soit $z \in \mathbb{C}$ qu'on suppose non nul. On a :

$$(i) \ \ z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow Arg(z) = 0 \quad [\pi] \quad (ii) \ \ z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

► *Il suffit de revenir à la définition d'un réel ou d'un imaginaire pur.*

2.2 Applications géométriques

Interprétation géométrique Dans le plan complexe, on considère le point $M(z)$:



On rappelle que : $|z| = OM$ et $Arg(z) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \quad [2\pi]$, et plus généralement, on a pour tout vecteur $\vec{u}$ d'affixe z :

$$|z| = \|\vec{u}\| \text{ et } Arg(z) = (\vec{i}, \vec{u}) \quad [2\pi]$$

Il existe de nombreux exercices dans lesquels on doit déterminer un ensemble de points $M(z)$ du plan complexe satisfaisant une condition donnée. Dans le cas d'une égalité en module, on cherchera d'abord à caractériser ces points de façon géométrique, mais si cela nous résiste, on pourra toujours déterminer les solutions sous forme algébrique en posant $z = x + iy$.

Exemple 3 On se place dans le plan complexe. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que:

1. $|z - 1 + i| = 2\sqrt{2}$
2. $|z - i| = |z - 5|$
3. $|z - i| = 2|z - 5|$

Propriété 18 (angle orienté de vecteurs).

Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ et $D(z_D)$ des points distincts. Alors:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = Arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \quad [2\pi]$$

► *On décompose l'angle* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ *grâce à la relation de Chasles sur les angles orientés.*

Exemple 4 On se place dans le plan complexe, et on note $A(3+i), B(2i)$ et $C(2-2i)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2.3 Notation exponentielle complexe

Définition On pose pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Ainsi, tout nombre complexe non nul pourra s'écrire :

$$z = re^{i\theta}$$

avec $r = |z|$ et $\theta = Arg(z)$ $[2\pi]$. Cette dernière écriture désignera la **forme exponentielle** de z.

Remarque C'est généralement la forme que l'on préfèrera car toutes les règles de calcul de l'exponentielle réelle sont conservées.

Corollaire 19 (propriétés de l'exponentielle complexe)**.**

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta'$ $[2\pi]$

(ii) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

(iii) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

(iv) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

► *Il suffit d'appliquer la propriété 14... sur les propriétés du module et de l'argument.*

Propriété 20 (formules d'Euler et formules de Moivre)**.**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

(ii) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ qui s'écrit encore : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

► *Si la formule d'Euler est presque immédiate, la formule de Moivre se démontre par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}$*, avant d'étendre le résultat aux nombres entiers relatifs.*

Dans de nombreux exercices, il est souvent très pratique de passer d'une écriture complexe à une autre; aussi, pour aller chercher la forme exponentielle d'un nombre complexe, on essaiera de réinvestir les propriétés des fonctions usuelles et les astuces de calcul comme la **factorisation par l'exponentielle de la demi-somme** :

$$\begin{cases} e^{ia} + e^{ib} = e^{i(a+b)/2}.(e^{i(a-b)/2} + e^{-i(a-b)/2}) \\ e^{ia} - e^{ib} = e^{i(a+b)/2}.(e^{i(a-b)/2} - e^{-i(a-b)/2}) \end{cases}$$

Exemple 5

1. Pour chacun de ces nombres complexes, déterminer sa forme exponentielle : $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2. En utilisant z_3, déterminer la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

3 Utilisation des nombres complexes en analyse

3.1 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Si $z^n = 0$, alors par intégrité du corps $\mathbb{C}$, on a nécessairement $z = 0$. Par conséquent, on ne s'intéressera ici qu'aux racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul.

Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de l'unité** tout nombre complexe z tel que :

$$z^n = 1$$

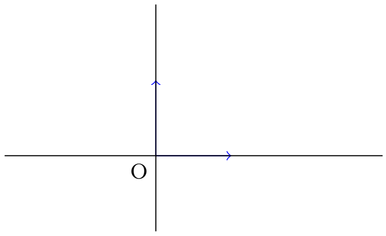
Théorème 21 (ensemble des racines n-ièmes de l'unité)**.**

On considère l'équation $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors cette équation admet pour solution l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité noté $\mathbb{U}_n$ tel que :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

► *Dans un premier temps, on caractérise les solutions de l'équation en identifiant leur module et leur argument; puis, on montre que cet ensemble de solutions peut se restreindre aux éléments donnés.*

Interprétation géométrique



Soit $n \geq 3$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, posons $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Alors les points $M_k(\omega_k)$ définissent les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

Exemple 6

1. Déterminer les solutions des équations: $z^n = 1$ pour $n \in [\![1, 5]\!]$.
2. Représenter alors les polygones réguliers associés.

Propriété 22 (structure des racines n-ièmes de l'unité)**.**

Soit $n \geq 2$. On note encore $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Alors, muni de la loi $\times$, $(\mathbb{U}_n, \times)$ désigne un **groupe commutatif**, c'est à dire :

- la loi $\times$ est une **loi de composition interne** :
$$\forall\,(z, z') \in \mathbb{U}_n^2,\ z \times z' \in \mathbb{U}_n$$
- et elle vérifie :
$$\begin{cases} \text{cette loi est } \textbf{associative} : \forall\,(z, z', z'') \in \mathbb{U}_n^3,\ z \times (z' \times z'') = (z \times z') \times z'' \\ \text{cette loi possède un } \textbf{élément neutre } 1 : \forall\, z \in \mathbb{U}_n,\ z \times 1 = 1 \times z = z \\ \text{tout élément admet un } \textbf{symétrique} \text{ par cette loi, qu'on appelle } \textbf{opposé} : \forall\, z\mathbb{U}_n,\ \exists\, z' \in \mathbb{U}_n,\ z \times z' = z' \times z = 1 \\ \text{cette loi est } \textbf{commutative} : \forall\,(z, z') \in \mathbb{U}_n,\ z \times z' = z' \times z \end{cases}$$

► *On revient à la définition d'un tel groupe défini comme les nombres complexes z satisfaisant $z^n = 1$.*

Propriété 23 (somme des racines n-ièmes de l'unité)**.**

Soit $n \geq 2$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, posons encore $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Alors, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$.

► *Grâce à la formule de Moivre, on reconnaîtra la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.*

Définition Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$. On appelle **racine n-ième de** Z tout nombre complexe z tel que :
$$z^n = Z$$

Théorème 24 (ensemble des racines n-ièmes d'un complexe non nul)**.**

On considère l'équation $z^n = Z$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$.
Alors cette équation admet pour solution l'ensemble des racines n-ièmes de Z défini par:
$$\{|Z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{Arg(Z)}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

► *On procède comme pour les racines n-ièmes de l'unité: on identifie leur forme exponentielle avant de les restreindre à l'ensemble donné.*

Généralement, on n'utilisera pas le théorème précédent en tant que tel, mais on s'inspirera de sa preuve pour retrouver explicitement l'ensemble des solutions en identifiant modules et arguments dans l'égalité :

Exemple 7 Déterminer les solutions de l'équation: $z^3 = 8i$.

Propriété 25 (recherche des solutions à l'aide d'une solution particulière).

On considère l'équation $z^n = Z$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$, et on note z_0 une solution particulière. Alors:

$$z^n = Z \Leftrightarrow \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\ z = z_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

Autrement dit, les racines n-ièmes de Z peuvent être obtenues en multipliant une racine évidente par les racines n-ièmes de l'unité.

► *Pour le sens direct, on fera intervenir le nombre complexe* $\frac{z}{z_0}$*...*

Dans certains cas, on cherchera donc d'abord à obtenir une solution particulière de l'équation, avant de la multiplier par les racines n-ièmes de l'unité... il s'agit là d'une méthode très efficace !

Exemple 8 Déterminer les solutions de l'équation: $z^3 = -1$.

Remarque Dans toutes ces propriétés, on s'est ramené à la forme exponentielle avant d'identifier le module et l'argument. A cause de la puissance, il serait plus difficile de travailler avec l'écriture algébrique... sauf dans le cas $n = 2$ où on peut aller chercher les racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

3.2 Résolution des équations du second degré

Propriété 26 (recherche algébrique des racines carrées d'un complexe non nul).

On considère l'équation $z^2 = Z$, $Z \in \mathbb{C}^*$.
Alors, il existe une solution particulière $z_0 = a + ib$ telle que :

$$a^2 - b^2 = Re(Z) \;\; , \;\; 2ab = Im(Z) \;\; , \;\; a^2 + b^2 = |Z|$$

► *Il suffit de traduire le fait que z_0 soit solution, et de passer au module dans l'équation.*

Exemple 9 Déterminer les solutions de l'équation: $z^2 = 3 - 4i$.

Remarque On fera attention avec le vocabulaire : on parle volontiers de la racine carrée d'un nombre réel positif a, c'est l'unique réel positif α tel que $\alpha^2 = a$ et on note $\alpha = \sqrt{a}$. Pour un nombre complexe a donné, il existe ici deux racines carrées associées qui sont les solutions de l'équation $z^2 = a$ mais dans $\mathbb{C}$, on ne notera jamais $\pm\sqrt{a}$!

Propriété 27 (résolution des équations du second degré).

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$. On définit Δ le **discriminant** associé par $\Delta = b^2 - 4ac$, et on note δ une de ses racines carrées. Alors :

(i) si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

(ii) si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes : $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.

► *On écrit l'équation sous forme canonique, puis on essaie de la factoriser afin d'utiliser l'intégrité.*

Exemple 10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

1. $z^2 + z + 1 = 0$
2. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$

Remarque Dans le cas particulier où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, on retiendra que les solutions z_1 et z_2 ne sont pas seulement distinctes: ce sont des racines complexes conjuguées.

3.3 Transformation des expressions trigonométriques

Dans le dernier chapitre, nous avons vu des formules très utiles qui nous permettent de linéariser des produits en somme. Par exemple :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2 x \text{ de sorte que: } \begin{cases} \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \\ \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \end{cases}$$

Plus généralement, on pourra faire appel aux formules d'Euler et Moivre pour **linéariser** les puissances $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$:

Exemple 11 Linéariser $\cos^5(x)$ et $\sin^5(x)$.

De la même façon, les formules d'addition nous donnaient en particulier,

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \text{ et } \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Une fois encore, les formules d'Euler et Moivre vont nous permettre d'obtenir des **polynômes trigonométriques** :

Exemple 12 Exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

4 Cas particulier des suites et fonctions à valeurs complexes

4.1 Etude d'une suite à valeur complexe

Définition Soit u une suite à valeurs complexes. On dit que la suite u est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ pour laquelle les éléments u_n sont tous au voisinage de ℓ à partir d'un certain rang :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

C'est à dire que dans $\mathbb{C}$:

$$|u_n - \ell| \leq \epsilon \Leftrightarrow u_n \in B(\ell, \epsilon)$$

Dans le cas contraire, on dira qu'une telle suite est **divergente**.

Remarques

1. On pourra encore retenir qu'une suite u converge vers un compexe ℓ si et seulement si la distance $|u_n - \ell|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
2. On pourra d'ailleurs retrouver toutes les principales propriétés sur les suites réelles : unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite, le théorème de Bolzano-Weierstrass, le lemme de majoration... mais n'ayant pas de relation d'ordre usuelle, on ne pourra pas, sur $\mathbb{C}$, obtenir des résultats liés à la monotonie ou à des inégalités.

Propriété 28 (caractérisation de la convergente à l'aide des suites parties réelles et imaginaires).

Soit u une suite à valeurs complexes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + ib_n$. Alors, u converge vers une limite $\ell = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\begin{cases} a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha \\ b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta \end{cases}$.

► *On raisonne par double implication : on se ramène à chaque fois à la limite de la différence.*

Corollaire 29 (cas particulier de la forme exponentielle).

Soit u une suite à valeurs complexes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = r_n e^{i\theta_n}$. On suppose de plus que :

$$\begin{cases} r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha \\ \theta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta \end{cases}$$

Alors, la suite (u_n) est convergente et $\lim u_n = \alpha e^{i\beta}$.

► *Il suffit en fait d'exploiter la caractérisation précédente...*

Lorsqu'on étudie une suite à valeurs complexes, il faudra donc commencer par la réécrire sous sa forme algébrique ou sa forme exponentielle. Restera à étudier alors les deux suites réelles associées...

Exemple 13 Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$ et on définit la suite (z_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$z_n = (1 + i\frac{\lambda}{n})^n$$

Montrer que (z_n) converge et préciser sa limite.

4.2 Etude d'une fonction à valeurs complexes

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs complexes. Alors, on dit généralement que f désigne une **fonction d'une variable réelle à valeurs complexes**, et on note $Re(f)$ et $Im(f)$ les **fonctions partie réelle et imaginaire** vérifiant :

$$\forall x \in I,\ f(x) = Re(f)(x) + iIm(f)(x)$$

Remarque On pourra encore une fois prolonger la plupart des résultats des fonctions à valeurs réelles, en comprenant qu'étudier f revient à étudier les deux fonctions $Re(f)$ et $Im(f)$... sauf pour les variations qui n'auront pas de sens dans $\mathbb{C}$!

Définition Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes, on note $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{C}$. On dit que f **tend vers** b **au voisinage de** a si :

$$\lim_{x \to a} |f(x) - b| = 0$$

Propriété 30 (limite d'une fonction à valeurs complexes)**.**

Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes, on note $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. On a encore :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to a} Re(f)(x) = \alpha \\ \lim_{x \to a} Im(f)(x) = \beta \end{cases}$$

▶ *On raisonne par double implication : on se ramène à chaque fois à la limite de la différence.*

Corollaire 31 (dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes)**.**

Soient $f : I \to \mathbb{C}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors, le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a si et seulement si les fonctions $Re(f)$ et $Im(f)$ sont dérivables en a. Et dans ce cas,

$$f'(a) = Re(f)'(a) + iIm(f)'(a)$$

▶ *Il suffit d'étudier la limite du taux d'accroissement de f en a et d'utiliser la propriété précédente.*

Exemple 14 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

Remarque Par extension, on peut imaginer ce qu'est une **fonction d'une variable complexe à valeurs complexes**. D'ailleurs, on pourra être amené à travailler avec l'**exponentielle complexe** défini par :

$$\exp : z \in \mathbb{C} \longmapsto e^z = e^a e^{ib}$$

et dont on peut vérifier qu'elle prolonge naturellement les propriétés algébriques de la fonction exponentielle réelle.

Par contre, on ne pourra pas prolonger toutes les fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$. Par exemple, si on souhaitait construire la fonction logarithme sur $\mathbb{C}$ en conservant ses propriétés algébriques, on aurait :

$$\ln(z) = \ln(|z|e^{i\theta}) = \ln(|z|) + \ln(e^{i\theta}) = \ln(|z|) + i\theta$$

Malheureusement, l'argument d'un nombre complexe non nul n'étant pas unique, ce prolongement de la notation ln ne nous donnerait plus une fonction au sens mathématique... car un même élément pourrait avoir ainsi plusieurs images !