Chapitre 3

Nombres réels et applications à l'étude des suites réelles

Après avoir introduit les premières fonctions usuelles, nous abordons ici un chapitre fondamental de l'analyse : les nombres réels et leurs applications à l'étude des suites réelles. Si au lycée, vous avez déjà travaillé sur quelques suites particulières, les propriétés sont encore nombreuses, et ce chapitre nous donnera l'occasion de fournir, pour la première fois, une définition rigoureuse de la limite.

Programmes 2021

Pour aller plus loin
Les suites numériques sont au coeur de nombreux chapitres, et les résultats associés sont fondamentaux d'autant qu'ils permettent de caractériser de nombreuses propriétés en analyse : ce sont les caractérisations séquentielles. D'ailleurs, en spé, vous verrez qu'on peut même étudier la notion de convergence dans tout espace vectoriel normé, et cela fera l'objet de très beaux exercices d'analyse.

1 Présentation des ensembles fondamentaux

1.1 Un premier exemple fondamental : l'ensemble des entiers naturels

Définition On appelle **ensemble des entiers naturels** l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2\ldots\}$ muni de la **relation d'ordre total** $\geq$ et qui vérifie les **axiomes** suivants :

(1) toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un minimum, appelé aussi **plus petit élément**.

(2) toute partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée admet un maximum, appelé aussi **plus grand élément**.

(3) $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

Remarques

1. Dans $\mathbb{N}$, l'addition sera évidemment notée $+$ et la multiplication usuelle sera notée $\times$ ou encore . par commodité. Par contre, on pourra dans certains cas considérer le produit comme une somme itérée du même terme : $\forall\ (n, a) \in \mathbb{N}^2,\ n.a = a + a + \ldots + a$ (n-fois).

2. On peut donner du sens à l'inégalité stricte dans $\mathbb{N}$:

$$\forall\ (a, b) \in \mathbb{N}^2,\ a > b \Leftrightarrow a \geq b + 1$$

3. Pour finir, on admet que les axiomes de $\mathbb{N}$ nous permettent d'obtenir le **principe de récurrence** et son corollaire :

Théorème 1 (principe de récurrence)**.**

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n.
S'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{cases} P(n_0) \text{ est vraie (initialisation)} \\ \forall\ n \geq n_0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \text{ (hérédité)} \end{cases}$$

alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Remarque Ce principe de récurrence sera très pratique, notamment lorsqu'on étudiera des suites satisfaisant une relation de récurrence à un pas, c'est à dire les suites dont le terme au rang n ne dépend que du terme situé au rang précédent.

Corollaire 2 (principe de récurrence forte)**.**

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n.
S'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\begin{cases} P(n_0) \text{ est vraie (initialisation)} \\ \forall\ n \geq n_0,\ (P(n_0), P(n_0+1)\ldots P(n)) \Rightarrow P(n+1) \text{ (hérédité)} \end{cases}$$

alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Remarque C'est ce dernier principe qui nous permettra de démontrer des propriétés concernant des suites récurrentes à pas multiples, c'est à dire les suites dont le terme au rang n dépend de termes situés aux rangs précédents. Par contre, on sera vigilant dans la vérification des conditions initiales et on vérifiera le même nombre de conditions initiales que pour la définition de la suite.

Exemple 1 On considère la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Calculer les premiers termes de la suite, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$.

1.2 Vers les nombres réels : un corps commutatif totalement ordonné

Définition On appelle **ensemble des entiers relatifs** l'ensemble noté $\mathbb{Z}$ composé des entiers naturels et de leur opposé, c'est à dire:

$$\mathbb{Z} = \{n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{-n, n \in \mathbb{N}\}$$

et qui vérifie les **axiomes** suivants :

(1) toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et minorée admet un plus petit élément.

(2) toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée admet un plus grand élément.

(3) $\mathbb{Z}$ n'a pas de plus grand, ni de plus petit élément.

Définition

- On appelle **ensemble des nombres rationnels** l'ensemble noté $\mathbb{Q}$ composé des nombres pouvant s'écrire sous la forme d'un rapport de deux entiers, c'est à dire :
$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b},\ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$$
et vérifiant la condition : pour tout $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$

- On appelle alors **ensemble des nombres réels** l'ensemble noté $\mathbb{R}$ composé des nombres rationnels et des nombres irrationnels de sorte que :
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$$

Remarque On a immédiatement par construction de ces ensembles :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Propriété 3 (structure algébrique).

Dans $\mathbb{R}$, on note $+$ et $\times$ les lois d'addition et de multiplication usuelles. Alors, muni de ces deux lois, on admet que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un **corps commutatif**, c'est à dire :

- $(\mathbb{R},+)$ est un **groupe commutatif** : $\begin{cases} \text{la loi } + \text{ est une loi de composition interne : } \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a+b \in \mathbb{R} \\ \text{la loi } + \text{ est associative : } \forall\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a+(b+c) = (a+b)+c \\ \text{la loi } + \text{ possède un élément neutre, } 0 : \forall\, a \in \mathbb{R},\ a+0 = 0+a = a \\ \text{tout élément appartenant à } \mathbb{R} \text{ possède un symétrique pour la loi } +\text{, appelé opposé :} \\ \qquad \forall\, a \in \mathbb{R},\ \exists\, b \in \mathbb{R},\ a+b = b+a = 0 \\ \text{la loi } + \text{ est commutative : } \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a+b = b+a \end{cases}$

- la loi $\times$ vérifie les conditions : $\begin{cases} \text{la loi } \times \text{ est une loi de composition interne : } \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \times b \in \mathbb{R} \\ \text{la loi } \times \text{ est associative : } \forall\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \\ \text{la loi } \times \text{ possède un élément neutre, } 1 : \forall\, a \in \mathbb{R},\ a \times 1 = 1 \times a = a \\ \text{la loi } \times \text{ est commutative : } \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \times b = b \times a \end{cases}$

- la loi $\times$ est distributive par rapport à l'addition : $\forall\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ et $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

- tout élément non nul appartenant à $\mathbb{R}$ possède un symétrique pour la loi $\times$, appelé inverse :
$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \exists\, b \in \mathbb{R},\ a \times b = b \times a = 1$

Corollaire 4 (intégrité de $\mathbb{R}$).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :
$$ab = 0 \Leftrightarrow\ a = 0 \text{ ou } b = 0$$
On dit encore que $\mathbb{R}$ est **intègre**.

► *On procède par double inclusion : on établit le sens direct en discutant les cas $a = 0$ et $a \neq 0$.*

Propriété 5 (relation d'ordre).

On rappelle que $\mathbb{R}$ est naturellement muni d'une **relation d'ordre total** $\geq$ définie par :
$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$$
et telle que :
$$\begin{cases} \text{la relation } \geq \text{ est } \textbf{réflexive} : \forall\, a \in \mathbb{R},\ a \geq a \\ \text{elle est } \textbf{antisymétrique} : \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \geq b \text{ et } b \geq a) \Rightarrow a = b \\ \text{elle est } \textbf{transitive} : \forall\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (a \geq b \text{ et } b \geq c) \Rightarrow a \geq c \\ \text{et pour laquelle l'ordre est } \textbf{total} : \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \geq b \text{ ou } b \geq a \end{cases}$$
De plus, on montre que cette relation est **compatible avec les lois** du corps : $\forall\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,
$$a \geq b, c \geq d \Rightarrow a + c \geq b + d, \text{ et } a \geq b \geq 0,\ c \geq d \geq 0 \Rightarrow a \times c \geq b \times d$$

► *On se ramène à chaque fois à l'étude de la différence des éléments situés de part et d'autre de l'inégalité.*

Remarque On peut résumer toutes ces propriétés en disant que $(\mathbb{R}, +, \times, \geq)$ est un **corps commutatif totalement ordonné** et on pourra toujours le représenter de la façon suivante :

Définition Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Sous réserve d'existence, on appelle :

- **borne supérieure** de A le plus petit des majorants de A noté $\sup(A)$. C'est à dire :

$$M = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in A,\ x \leq M \text{ , c'est à dire } M \text{ est un majorant de } A \\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, x_\epsilon \in A,\ x_\epsilon > M - \epsilon \end{cases}$$

- **borne inférieure** de A le plus grand des minorants de A noté $\inf(A)$. C'est à dire :

$$m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in A,\ x \geq m \text{ , c'est à dire } m \text{ est un minorant de } A \\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, x_\epsilon \in A,\ x_\epsilon < m + \epsilon \end{cases}$$

Remarques

1. On peut observer que :
   - toute partie non vide admettant un maximum possède une borne supérieure et dans ce cas : $\max(A) = \sup(A)$.
   - toute partie non vide admettant un minimum possède une borne inférieure et dans ce cas : $\min(A) = \inf(A)$.
2. Attention, la réciproque n'est pas vraie puisque certaines parties de $\mathbb{R}$ possèdent une borne supérieure ou inférieure, mais pas de maximum ou de minimum : on pourra par exemple considérer l'intervalle $[-1, 2[$. C'est même pour cette raison qu'on définit la notion de borne supérieure ou inférieure : elles représentent des extremas "limites" qui ne sont pas forcément atteints.

Définition On admet pour finir que l'ensemble des nombres réels vérifie les **axiomes de la borne supérieure et de la borne inférieure** de sorte que :

(1) toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, généralement notée $\sup(A)$.

(2) toute partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$, généralement notée $\inf(A)$.

Théorème 6 (caractérisation séquentielle des bornes supérieure et inférieure)**.**

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors, on a :

(i) $M = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{il existe } (x_n) \text{ une suite de points de } A \text{ telle que } x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M \end{cases}$

(ii) $m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A \\ \text{il existe } (x_n) \text{ une suite de points de } A \text{ telle que } x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} m \end{cases}$

► *Les deux caractérisations se démontrent de la même façon : on procède par double implication et pour le sens direct, il suffira de poser $\epsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$.*

Avant de parler de borne supérieure ou inférieure, on vérifiera d'abord que la partie donnée est non vide et majorée ou non vide et minorée.

Exemple 2

1. On définit l'ensemble A par :
$$A = \{\frac{n-1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$$
Etablir que A possède une borne supérieure et une borne inférieure, puis déterminer la valeur de ces bornes.
2. Même question avec l'ensemble $B = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m},\ (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$.

1.3 Cas particulier d'une suite de réels indexés par $\mathbb{N}$ ou une partie finie de $\mathbb{N}$

Définition Soit E un ensemble quelconque. On dit que E est **dénombrable** si E est fini ou s'il existe ϕ une application bijective de $\mathbb{N}$ sur E, c'est à dire une application qui à chaque entier associe un unique élément de E. Dans ce cas, les éléments de E pourront être numérotés et on notera :

$$E = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$$

On parle plutôt de **suites d'éléments indexés par $\mathbb{N}$ ou une partie finie de $\mathbb{N}$**.

Notation Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une suite finie de nombre réels. On note alors la **somme** et le **produit** de ces nombres de la façon suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n \text{ et } \prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times \ldots \times u_n$$

avec k un indice muet qu'on pourra modifier si besoin.

Remarque L'associativité et la commutativité des opérations dans $\mathbb{R}$ nous permettront de regrouper les termes par paquet ou de les réordonner afin d'en simplifier les calculs.

Exemple 3 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la **formule de factorisation** :

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

Propriété 7 (somme et produit télescopiques)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et considérons $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une suite finie de nombres réels. Alors :

(i) $\sum_{k=1}^{n-1} u_k - u_{k+1} = u_1 - u_n$

(ii) et sous réserve d'existence, $\prod_{k=1}^{n-1} \dfrac{u_k}{u_{k+1}} = \dfrac{u_1}{u_n}$

► *Il suffit de mettre en place un changement d'indice pour faire apparaître le télescopage...*

Propriété 8 (exemple des suites arithmétiques)**.**

On rappelle qu'une **suite arithmétique de raison** $r \in \mathbb{R}$ désigne toute suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

Alors,

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$, ou bien plus généralement : $\forall\, n \geq p,\ u_n = u_p + (n - p)r$ (formule explicite)

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$.

► *On établit simplement ces résultats par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.*

Propriété 9 (exemple des suites géométriques)**.**

On rappelle qu'une**suite géométrique de raison** $q \in \mathbb{R}$ désigne toute suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q$$

Alors,

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$, ou bien plus généralement : $\forall\, n \geq p,\ u_n = u_p \times q^{n-p}$ (formule explicite)

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} (n+1)u_0, \text{ si } q = 1 \\ u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ sinon} \end{cases}$.

► *On établit simplement ces résultats par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.*

Corollaire 10 (formules remarquables)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On retrouve alors les deux formules remarquables :

$$\text{(i)} \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(ii)} \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} (n+1), \text{ si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque On fera très attention à ce que ces sommes commencent bien à $k=0$, quitte à ajuster les choses... Il s'agit là d'une erreur très courante et ainsi, on a par exemple :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=3}^{n} k = 3+\ldots+n = \sum_{k=0}^{n} k - (0+1+2) = \ldots \\ \displaystyle\sum_{k=3}^{n} q^k = q^3+\ldots+q^n = q^3.\sum_{k=0}^{n-3} q^k = \ldots \end{cases}$$

1.4 La notation valeur aboslue : définition et interprétation géométrique

Définition Soit $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que la **valeur absolue** de x désigne le nombre réel noté $|x|$ tel que :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ , si } x \geq 0 \\ -x \text{ , sinon} \end{cases}$$

Propriété 11 (immédiate).

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors, on a :

(i) $|x| \geq 0$

(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\sqrt{x^2} = |x|$

(iv) $|xy| = |x||y|$ et pour tout $y \neq 0$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

► *A chaque fois, on peut ou bien revenir à la définition de la valeur absolue, ou utiliser (iii) quand celui-ci aura été démontré.*

Propriété 12 (inégalité triangulaire et inégalité triangulaire inversée).

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors, on a :

$$||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

► *On commence par montrer la seconde inégalité en élevant au carré. On en déduit la seconde astucieusement.*

Remarques

1. On pourra adapter l'énoncé et obtenir ainsi **un autre encadrement très pratique** de la différence :

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$$

2. La valeur absolue nous permet en fait de définir la **distance** entre deux réels. Ainsi, si on fixe $a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$, on peut aisément représenter l'ensemble des nombres $\{x \in \mathbb{R},\ |x-a| \leq \epsilon\}$:

et on retiendra l'équivalence :

$$|x-a| \leq \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$$

2 Etude d'une suite réelle

2.1 Premières définitions

Définition On appelle alors **suite réelle** toute application u définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$u : n \longmapsto u(n) \underset{not.}{=} u_n$$

Elle sera notée u ou plus souvent (u_n), et cette application nous donne en fait une suite infinie de nombres réels.
Pour finir, on notera aussi $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque Généralement, ces suites réelles peuvent être définies :

- par une **formule explicite**, directement en fonction de n. Par exemple,
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin(\sqrt{n^2+1})$$
- par une **formule de récurrence**, c'est à dire une relation entre les termes consécutifs de la suite. Par exemple,
$$u_0 = 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$
- par une **formule implicite**, quand le terme général est solution d'une équation dépendant de n. Par exemple,
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\, u_n \text{ désigne l'unique solution de } x^n + x - 1 = 0 \text{ sur } [0,1]$$

Définition Soit u une suite à valeurs réelles telle que $U = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On dit que la suite :

- u est **majorée** si la partie U est majorée dans $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$$
- u est **minorée** si la partie U est minorée dans $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$$
- u est **bornée** si la partie U est bornée dans $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M \Leftrightarrow -M \leq u_n \leq M \Leftrightarrow \text{ elle est à la fois majorée et minorée.}$$

Définition Soit u une suite à valeurs réelles. On dit que la suite u est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ pour laquelle les éléments u_n sont tous au voisinage de ℓ à partir d'un certain rang :
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \epsilon$$
C'est à dire que dans $\mathbb{R}$:
$$|u_n - \ell| \leq \epsilon \Leftrightarrow \ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon$$

Dans le cas contraire, on dira qu'une telle suite est **divergente**.

Remarque On pourra ainsi retenir qu'une suite u converge vers un réel ℓ si et seulement si la distance $|u_n - \ell|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Théorème 13 (unicité de la limite).

Soit u une suite à valeurs réelles qu'on suppose convergente. Alors, sa limite est unique et elle sera notée $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ou simplement $\lim u_n$.

▶ *On raisonne par l'absurde avant de jouer sur les voisinages autour des limites ℓ_1 et ℓ_2.*

Remarque Dans le cas où la suite est définie sous forme explicite, cela revient à déterminer la limite de la fonction associée quand $n \to +\infty$. On n'hésitera donc pas à utiliser les limites de référence.

Propriété 14 (toute suite convergente est bornée).

Soit u une suite à valeurs réelles qu'on suppose convergente. Alors, elle est nécessairement bornée.

▶ *On traduit simplement la convergence afin de trouver un majorant de $|u_n|$ à partir d'un certain rang, les autres éléments étant en nombre fini, il est facile d'en extraire un majorant global.*

Remarque La réciproque est fausse : il existe des **contre-exemples** de suites bornées qui ne convergent pas, comme par exemple $(-1)^n$ ou encore $\sin(n)$.

Propriété 15 (combinaison linéaire de suites de limite nulle).

Soient u, v deux suites à valeurs réelles qu'on suppose de limite nulle, et considérons $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $\lim \lambda u_n + v_n = 0$.

▶ *On revient à la définition de la limite et on jouera sur les rangs à partir desquels $|u_n|$ et $|v_n|$ sont majorés.*

2.2 Opérations sur les limites et inégalités

Propriété 16 (comparaison locale)**.**

Soit u une suite à valeurs réelles qu'on suppose convergente vers une limite $\ell > 0$. Alors, il existe un rang N tel que :

$$\forall\, n \geq N,\ u_n > 0$$

▶ *Il suffit de traduire la convergence de la suite pour $\epsilon = \ell/2$...*

Propriété 17 (lemme de majoration)**.**

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et on considère α une suite réelle positive tendant vers 0 telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq \alpha_n$$

Alors, la suite u est convergente de limite $\lim u_n = \ell$.

▶ *Il suffit de traduire la limite de α puis d'utiliser la transitivité de la relation d'ordre.*

Remarque Il ne s'agit pas du théorème d'encadrement, mais bien d'un lemme de majoration très pratique quand on veut justifier la convergence d'une suite.

Exemple 4 On considère la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(\frac{u_n}{2})$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0|$.
3. En déduire que la suite u est convergente.

Propriété 18 (opérations algébriques)**.**

Soient u, v des suites convergentes de limites $a, b \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors:

(i) la suite $u + v$ est convergente de limite $a + b$,

(ii) la suite $\lambda.u$ est convergente de limite $\lambda.a$,

(iii) la suite $u \times v$ est convergente de limite $a \times b$,

(iv) la suite $|u|$ est convergente de limite $|a|$.

(v) si de plus $a \neq 0$, la suite $\frac{1}{u}$ est définie à partir d'un certain rang, et elle est convergente de limite $\frac{1}{a}$.

▶ *On se ramène au théorème de majoration en majorant la différence par quelque chose qui tend vers 0.*

Remarque Attention, les implications réciproques ne sont pas vraies : on peut considérer $u_n = n$ et $v_n = -n$...

Propriété 19 (passage à la limite dans les inégalités larges)**.**

Soient u, v des suites à valeurs réelles qu'on suppose convergentes et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$, alors $\lim u_n \leq M$.

(ii) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$, alors $\lim u_n \geq M$.

(iii) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

▶ *Pour les deux premiers points, on peut raisonner par l'absurde. Le dernier point découle alors de (i) et (ii).*

Remarque On retiendra que cette propriété ne s'applique qu'aux inégalités larges. En effet, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{n} < 1$, alors par passage à la limite, l'inégalité ne peut rester stricte et on écrira : $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} \leq 1$.

2.3 Cas particulier des limites infinies

Définition Soit u une suite à valeurs réelles.

- On dit que u **diverge vers** $+\infty$ si pour n'importe quel réel M, on peut le "dépasser":
$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \Rightarrow u_n \geq M$$
et on écrit alors : $\lim u_n = +\infty$.
- On dit que u **diverge vers** $-\infty$ si pour n'importe quel réel M, on peut le "dépasser":
$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \Rightarrow u_n \leq M$$
et on écrit alors : $\lim u_n = -\infty$.

Remarque Ainsi, la notion de divergence recouvre deux idées : c'est à dire qu'une suite réelle pourra diverger dans le sens où elle ne converge pas, ou bien elle pourra diverger vers $\pm\infty$.

Propriété 20 (opérations sur les limites).

Si on se place dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors on pourra prolonger naturellement les opérations algébriques sur les limites à l'exception des **formes indéterminées** usuelles :
$$\infty - \infty \ ,\ \ 0 \times \pm\infty\ ,\ \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\ ,\ \ \frac{0}{0}$$

Bien entendu, il ne faudra pas hésiter à travailler sur l'expression algébrique avant de conclure :

Exemple 5 Déterminer la limite de $\frac{u_n}{v_n}$ pour $u_n = n\sum_{k=1}^{n} k$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Théorème 21 (de comparaison).

Si on se place dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors on pourra aussi prolonger naturellement les inégalités sur les limites de sorte que si u, v désignent deux suites réelles telles que:
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$$

(i) Si $\lim u_n = +\infty$, alors v est divergente et $\lim v_n = +\infty$.

(ii) Si $\lim v_n = -\infty$, alors u est divergente et $\lim u_n = -\infty$.

3 Quelques critères de convergence

3.1 Théorème d'encadrement et théorème de la limite monotone

Théorème 22 (d'encadrement).

Soient u, v, w des suites réelles vérifiant :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$$
Si de plus, u et w sont convergentes de même limite ℓ, alors v est aussi convergente et $\lim v_n = \ell$.

► *On traduit les deux convergences et en prenant le rang maximum, on en déduit l'encadrement souhaité de v_n.*

Exemple 6 On considère la suite u définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n^2})$$

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$.
2. En déduire la limite de la suite u.

Définition Soit u une suite à valeurs réelles. On dit que :

- la suite u est **croissante** si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$;
- la suite u est **décroissante** si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$;
- la suite u est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

On pourra alors parler de **stricte monotonie** quand les inégalités précédentes seront strictes.

Remarques

1. Si les termes d'une telle suite réelle sont strictement positifs, on aura l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ et de même, } u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

   et on pourra donc préférer étudier le quotient plutôt que la différence entre deux termes consécutifs.

2. Une suite croissante est donc minorée par son premier terme u_0 : $u_{n+1} \geq u_n \geq \ldots \geq u_1 \geq u_0$, et une suite décroissante est donc majorée par son premier terme u_0 : $u_{n+1} \leq u_n \leq \ldots \leq u_1 \leq u_0$.

Théorème 23 (de la limite monotone pour une suite croissante)**.**

Soit u une suite à valeurs réelles qu'on suppose croissante.

(i) Si u est majorée, alors elle est convergente et dans ce cas,

$$\lim u_n = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

(ii) Si u est non majorée, alors elle est divergente de sorte que $\lim u_n = +\infty$.

▶ *On introduit l'ensemble* $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *avant de se ramener à la définition de la limite.*

Théorème 24 (de la limite monotone pour une suite décroissante)**.**

Soit u une suite à valeurs réelles qu'on suppose décroissante.

(i) Si u est minorée, alors elle est convergente et dans ce cas,

$$\lim u_n = \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

(ii) Si u est non minorée, alors elle est divergente de sorte que $\lim u_n = -\infty$.

▶ *On introduit l'ensemble* $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *avant de se ramener à la définition de la limite.*

Ces deux **théorèmes de la limite monotone** sont fort pratiques car ils précisent le comportement asymptotique d'une suite réelle de sorte que toute suite réelle monotone possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, mais contrairement au théorème d'encadrement, ils ne nous permettent pas d'en déterminer la limite.

Exemple 7 Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergente.

3.2 Cas particulier des suites adjacentes

Définition Soient u, v deux suites à valeurs réelles. On dit que ce sont des **suites adjacentes** si :

$$\begin{cases} \text{l'une est croissante,} \\ \text{l'autre est décroissante,} \\ \lim\ v_n - u_n = 0 \end{cases}$$

Théorème 25 (de convergence pour les suites adjacentes)**.**

Soient u, v deux suites à valeurs réelles qu'on suppose adjacentes avec u croissante v décroissante. Alors, les suites u et v convergent et elles ont la même limite de sorte que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_n$$

▶ *On commence par étudier la suite* $v_n - u_n$ *afin de justifier l'inégalité* $u_n \leq v_n$*, puis on fera appel aux deux théorèmes de convergence monotone.*

Remarque Si on suppose de plus que ces suites sont strictement monotones, l'encadrement précédent pourra s'écrire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} < v_n$$

Exemple 8 On considère les suites u et v définies par :

$$\forall\, n \geq 1,\; u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad , \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

1. Montrer u et v désignent des suites adjacentes dont on précisera la limite ℓ.
2. En déduire que ℓ n'est pas rationnelle.

3.3 Caractérisation à l'aide de suites extraites

Définition Soient u, v deux suites réelles. On dit que v est une **suite extraite** de u s'il existe une application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; v_n = u_{\phi(n)}$$

Remarque Autrement dit, une telle suite est simplement constituée d'éléments u_n pris dans l'ordre croissant des indices, comme par exemple :

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\; v_n = u_{2n}$ avec $\phi : n \mapsto 2n$, la suite des termes d'indice pair,
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\; v_n = u_{2n+1}$ avec $\phi : n \mapsto 2n+1$, la suite des termes d'indice impair.

Définition Soit u une suite à valeurs réelles. On appelle alors **valeur d'adhérence** toute limite d'une suite extraite de u.

Propriété 26 (suite extraite d'une suite convergente)**.**

(i) Si u est une suite convergente de limite ℓ, alors toute suite extraite converge encore vers ℓ. Autrement dit, u n'admet qu'une seule valeur d'adhérence qui est sa limite.

(ii) Et par contraposée, si une suite admet au moins deux valeurs d'adhérence, alors elle est nécessairement divergente.

► *Le deuxième point découle immédiatement du premier dans lequel il suffit d'utiliser la stricte monotonie de ϕ, application associée à la suite extraite.*

Remarque On fera bien attention à ne pas conclure trop vite : si une suite extraite converge, ce n'est pas forcément le cas de la suite elle-même. En effet, la suite $((-1)^n)$ est divergente et pourtant la suite des termes d'indices pairs converge vers 1.

Propriété 27 (caractérisation de la limite à l'aide des suites extraites)**.**

Soient u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$u \text{ est convergente de limite } \ell \Leftrightarrow \text{les suites extraites } (u_{2n}) \text{ et } (u_{2n+1}) \text{ sont convergentes de limite } \ell$$

► *Le sens direct a déjà été démontré ; pour la réciproque, on choisira le rang maximum pour que les éléments d'indices pairs et impairs soient simultanément au voisinage de ℓ.*

Ces propriétés sur les suites extraites seront très utiles tant pour justifier la convergence d'une suite, que pour démontrer qu'une suite n'a pas de limite...

Exemple 9 Montrer que la suite $(\sin(n\frac{\pi}{2}))$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$.

Théorème 28 (de Bolzano-Weierstrass)**.**

De toute suite réelle bornée, on peut construire une suite extraite convergente.

► *On peut procéder par dichotomie et montrer qu'on peut extraire une sous-suite convergente.*

Remarque Ce résultat est fort pratique en analyse, car on aura souvent des suites bornées et il nous permettra ainsi d'en extraire au moins une sous-suite convergente.

4 Exemples de suites récurrentes

4.1 Suites arithmético-géométriques

Propriété 29 (suites arithmético-géométriques).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \notin \{0, 1\}$. On considère u la suite récurrente linéaire d'ordre 1 définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

Notons ℓ la limite éventuelle de la suite u et posons $v_n = u_n - \ell$, alors v est une suite géométrique de raison a de sorte que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$$

▶ *Il suffit de partir de la suite v ainsi définie...*

4.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Propriété 30 (suites récurrentes linéaires d'ordre 2).

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a, c \neq 0$. On considère u la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

Définissons Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée : $ar^2 + br + c = 0$. Alors :

- si $\Delta \neq 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 et dans ce cas,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \text{ avec } \lambda, \mu \text{ des constantes déterminées par les conditions initiales}$$

- si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution double r_0 et dans ce cas,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu.n)r_0^n \text{ avec } \lambda, \mu \text{ des constantes déterminées par les conditions initiales}$$

▶ *On peut démontrer ce résultat par le principe de récurrence forte, l'initialisation étant assurée par les conditions initiales.*

Remarques

1. Si dans ce chapitre nous travaillons avec des suites réelles, on pourra aussi appliquer ce résultat à des suites complexes. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on ne différencie que deux cas $\Delta = 0$ ou $\Delta \neq 0$.

2. En fait, si une suite u est récurrente linéaire d'ordre 2, c'est nécessairement une combinaison linéaire de deux suites, et ainsi on pourra retenir la notation suivante :

   - si $\Delta \neq 0$, alors $(u_n) \in Vect((r_1^n), (r_2^n)) \Leftrightarrow \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
   - si $\Delta = 0$, alors $(u_n) \in Vect((r_0^n), (n.r_0^n)) \Leftrightarrow \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_0^n + \mu.n.r_0^n$.

Exemple 10 Déterminer la limite de la suite u définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 8u_{n+2} - 2u_{n+1} - 1u_n = 0$$

4.3 Système dynamique de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse ici à la suite récurrente définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction à valeurs réelles qu'on suppose définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$.

Propriété 31 (intervalle stable).

Avec les notations précédentes, on note $J \subset I$ un intervalle stable par f, c'est à dire que $f(J) \subset J$. Si $u_0 \in J$, alors la suite u est entièrement définie et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \in J$.

▶ *On établit ce résultat par une simple récurrence sur n.*

Propriété 32 (monotonie de la suite).

Si de plus on suppose que f est monotone sur un intervalle stable J. Alors,

(i) si f est croissante, la suite u est monotone et son sens de variation dépend du signe de $u_1 - u_0$,

(ii) si f est décroissante, on s'intéresse aux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui seront toutes deux monotones et dont le sens de variations dépendra du signe de $u_2 - u_0$ et $u_3 - u_1$.

▶ *On établit ce résultat par une simple récurrence sur n.*

Propriété 33 (recherche de la limite).

Pour finir, on suppose que f est une fonction continue sur un intervalle I stable par f. Si de plus la suite u converge dans I, alors sa limite est un **point fixe** vérifiant : $f(\ell) = \ell$.

▶ *Il suffit de passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ sans oublier d'invoquer la continuité de f.*

Généralement, quand une telle suite nous sera donnée, on essaiera d'adopter le plan d'étude suivant :

1. on détermine les points fixes éventuels,
2. on recherche des intervalles stables par f,
3. selon la valeur de u_0, on discerne les cas en essayant de mettre en oeuvre le théorème de convergence monotone.

Exemple 11 On définit la suite u par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8) \end{cases}$$

Suivant les valeurs de u_0, étudier la nature de la suite u.

5 Applications

5.1 Les notations de Landau

Définition Soient u, v deux suites à valeurs réelles pour lesquelles on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$.
On dit que la suite u est **négligeable devant la suite** v s'il existe (a_n) une suite de limite nulle telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a_n v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

On notera alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Définition Soient u, v deux suites à valeurs réelles pour lesquelles on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$.
On dit que la suite u est **dominée par la suite** v s'il existe (b_n) une suite bornée telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = b_n v_n \Leftrightarrow (\frac{u_n}{v_n}) \text{ est bornée}$$

On notera alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Définition Soient u, v deux suites à valeurs réelles pour lesquelles on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, $v_n \neq 0$.
On rappelle que la suite u est **équivalente à la suite** v s'il existe (a_n) une suite de limite 1 telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = a_n v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

On notera alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Propriété 34 (relations entre ces notations).

Soient u, v deux suites à valeurs réelles pour lesquelles on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, $v_n \neq 0$. Alors,

(i) $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \ \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$

(ii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Leftrightarrow\ u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$

▶ *Il suffit de revenir à la définition de chacune des notations.*

Remarques

1. Ces notations seront utilisées pour comparer le comportement asymptotique de deux suites réelles, et ainsi :

$$\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \longrightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

2. La relation $\sim$ est la plus pratique, mais on ne l'utilisera que pour simplifier des produits ou des quotients... cela nous évitera de trouver des suites équivalentes à 0. Dans le pire des cas, il faudra de toute façon être en mesure de revenir au quotient pour justifier les équivalents proposés.
3. Avec les suites réelles, il n'y aura pas d'ambiguïté et on ne sera pas obligé de préciser à chaque fois qu'on travaille à l'infini.

Exemple 12

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
2. Donner un équivalent immédiat de x_n et en déduire sa limite.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\arctan(x_n) = x_n - n\pi$, puis que :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$$

5.2 Convergence des sommes de Cesaro

Propriété 35 (cas de la moyenne arithmétique)**.**

Soit u une suite réelle qu'on suppose convergente de limite ℓ. Alors, la suite des **sommes de Césaro** définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k, \text{ est convergente de limite } \ell.$$

► *On revient à la définition de la limite en essayant de majorer la différence* $|S_n - l|$*...*

Exemple 13 Déterminer la limite de la série définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1 + \frac{1}{k})^k$$

Corollaire 36 (équivalent d'une somme partielle dans le cas d'une limite non nulle)**.**

Soit u une suite réelle qu'on suppose convergente de limite $\ell \neq 0$. Alors, on a un équivalent immédiat de la somme partielle :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ell$$

5.3 Parties denses de $\mathbb{R}$

Définition Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que A est **dense** dans $\mathbb{R}$, qu'on notera $\overline{A} = \mathbb{R}$, si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ distincts :

$$[x, y] \cap A \neq \emptyset$$

c'est à dire que tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient au moins un point de A.

Propriété 37 (caractérisation séquentielle)**.**

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors :

$$\overline{A} = \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ il existe une suite } (x_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que : } \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

► *On procède par double implication : pour le sens direct, on construira une telle suite en considérant l'intervalle* $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$.

Remarque Les résultats de densité sont importants et ils nous permettront à chaque fois d'en tirer deux conséquences. Par exemple, si on considère que $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{R}$, alors tout nombre réel peut être vu comme la limite d'une suite de points de A, et ainsi :

1. on pourra souvent étendre des propriétés vraies sur A à $\mathbb{R}$ par un simple passage à la limite.
2. tout nombre réel peut être approché de part et d'autre par des éléments de A dont on contrôle la distance.

C'est d'ailleurs ce type d'approximation qui nous donnera les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Propriété 38 (définition de la partie entière)**.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un unique entier $n_x \in \mathbb{Z}$ tel que $n_x \leq x < n_x + 1$. Généralement, n_x est appelé la **partie entière** de x, et elle sera notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.
De plus, on a :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq x - E(x) < 1$$

et ainsi, la partie entière de x ne désigne rien d'autre qu'une **valeur approchée de x à l'unité près**.

▶ *On procède par existence et unicité : pour l'existence, on pensera à introduire l'ensemble* $A = \{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$.

Au delà de sa définition, les inégalités associées à la partie entière seront tout aussi utiles :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1, \text{ ou encore : } x - 1 < E(x) \leq x$$

Exemple 14 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} E(kx)$.

Remarque Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, l'encadrement précédent nous donne en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$E(x10^n)10^{-n} \leq x < E(x10^n)10^{-n} + 10^{-n} \Rightarrow |x - E(x10^n)10^{-n}| < 10^{-n}$$

Ainsi, en posant $x_n = E(x10^n)10^{-n}$ et $y_n = E(x10^n)10^{-n} + 10^{-n} = x_n + 10^{-n}$, on a construit deux suites de limite x telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_n \text{ nous donne une } \textbf{valeur décimale approchée par défaut de } x \textbf{ à } 10^{-n} \textbf{ près} \\ y_n \text{ nous donne une } \textbf{valeur décimale approchée par excès de } x \textbf{ à } 10^{-n} \textbf{ près} \end{cases}$$

Propriété 39 (densité de sous-ensembles particuliers).

On considère $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels. Alors :

(i) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Autrement dit, tout nombre réel peut être vu comme la limite d'une suite de nombres rationnels.

(ii) $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Autrement dit, tout nombre réel peut être vu comme la limite d'une suite de nombres irrationnels.

▶ *Pour le premier point, on pourra faire appel à la suite* (x_n) *des valeurs approchées par défaut de* x. *Pour le dernier point, on reviendra encore à la caractérisation séquentielle de la densité.*