Chapitre 1

Fonctions d'une variable réelle : étude et premiers exemples

Au cours du premier chapitre, nous avons mené nos premières études de fonctions pour démontrer des inégalités. Nous revenons ici sur le principe d'une telle étude, et nous redéfinirons les premières fonctions usuelles : les fonctions logarithmes, exponentielles et puissances, des fonctions pour lesquelles les propriétés algébriques seront nombreuses.

Programmes 2021

Pour aller plus loin
Si ce chapitre peut d'abord être vu comme des rappels, il reste incontournable car il sera important, plus tard, d'être capable d'étudier des fonctions avec des paramètres donnés. Il y a en effet de nombreux théorèmes de deuxième année pour les suites ou séries de fonctions, ainsi que pour les intégrales à paramètre qui exigent des dominations assez fines et donc une maitrise réelle des fonctions.

1 Etude des fonctions d'une variable réelle

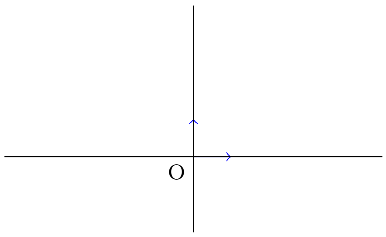
1.1 Plan d'étude d'une telle fonction : rappels et compléments

Définition On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. On appelle **fonction d'une variable réelle** tout mécanisme f qui à tout nombre réel x associe au plus une **image** notée $f(x)$. Généralement, la fonction f sera notée :

$$f : x \longmapsto f(x)$$

On appelle alors **domaine de définition de** f l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $f(x)$ est bien définie, et si $y = f(x)$, on dit aussi que x désigne un **antécédent** de y.

De plus, si on se place dans le plan usuel muni d'un repère, alors on peut représenter l'ensemble des points $M(x, f(x))$: ils constituent la **courbe représentative** de la fonction f notée C_f et qui a pour **équation** $y = f(x)$.



Remarque Généralement, on adoptera toujours le même **plan d'étude** :

① Etude de la parité et restriction du domaine d'étude

② Etude des variations

③ Limites aux bornes du domaine

④ Continuité et dérivabilité en des points particuliers

⑤ Branches infinies et représentation graphique

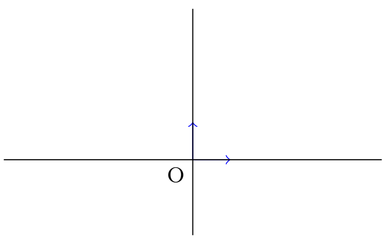
① Etude de la parité et restriction du domaine d'étude

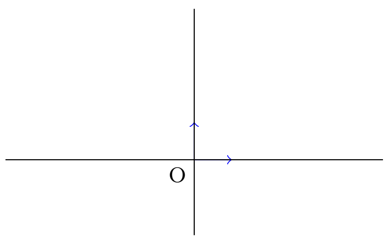
Définition Soit f une fonction définie sur D inclus dans $\mathbb{R}$. On dit que f est :

- une **fonction paire** si $\begin{cases} D \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \forall\, x \in D,\ f(-x) = f(x) \end{cases}$.
- une **fonction impaire** si $\begin{cases} D \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \forall\, x \in D,\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

Exemple 1 Etudier la parité de la fonction $f : x \longmapsto \ln(\dfrac{x-1}{x+1})$.

Représentation On peut observer que la représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy). De la même façon, la représentation graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à O, l'origine du repère.





Ainsi, pour étudier de telles fonctions, il suffira de se restreindre au domaine $D \cap [0, +\infty[$, puis de compléter la courbe par une simple symétrie.

② Etude des variations

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est **croissante** sur I si f conserve les inégalités, c'est à dire : $\forall\,(x,y) \in I^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f est **décroissante** sur I si f retourne les inégalités, c'est à dire : $\forall\,(x,y) \in I^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- f est **monotone** sur I si f est croissante ou décroissante sur I.

Remarques

1. Si les inégalités sont strictes, on précisera notre propos en disant que f est **strictement monotone**.
2. De plus, on rappelle que la monotonie dépend du signe de la dérivée. Plus précisément :

Théorème 1 (caractérisation de la monotonie par le signe de la dérivée)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I qu'on suppose dérivable sur I. Alors, on montrera que :

(i) f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

(ii) f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

(iii) f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Remarque Pour aller chercher le signe de la dérivée, on appliquera les formules de dérivation et on essaiera de se ramener à un produit ou quotient de termes dont le signe est facile à déterminer.

Propriété 2 (opérations sur les fonctions dérivables)**.**

Soient f, g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors, on rappelle que :

(i) la somme $f+g$ est encore dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(ii) le produit fg est encore dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(iii) sous réserve d'existence, le quotient $\dfrac{1}{g}$ est encore dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(\dfrac{1}{g})'(x) = \dfrac{-g'(x)}{(g(x))^2}$.

(iv) sous réserve d'existence, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est encore dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(\dfrac{f}{g})'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Propriété 3 (dérivabilité d'une fonction composée)**.**

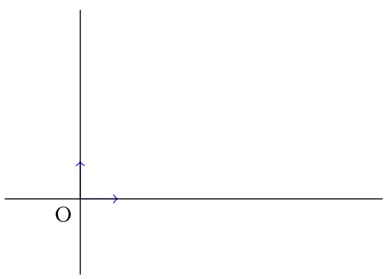
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J, telles que $f(I) \subset J$.
Alors, on admet que la fonction $g \circ f$ est encore dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Remarque Cette dernière propriété est fort pratique, car elle nous donnera un moyen facile pour retrouver les dérivées des fonctions composées usuelles...

③ Limites aux bornes du domaine

Définition Soient f une fonction définie sur D inclus dans $\mathbb{R}$ et notons $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a si pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage autour de a pour lequel $f(x) \in\ V$:



Cette limite sera notée : $\lim\limits_{a} f = b$ ou encore $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Remarques

1. Dans le cas où on ne s'intéresse qu'à la limite de $f(x)$ quand $x \to a$, $x < a$ ou quand $x \to a$, $x > a$, on parle de **limite à gauche** ou de **limite à droite**.

2. Pour aller chercher la limite d'une fonction aux bornes du domaine de définition, on utilise généralement les opérations sur les limites :

Propriété 4 (opérations sur les limites)**.**

Pour calculer la limite d'une fonction, on sera souvent amené à utiliser ces règles de calcul qu'on démontrera dans un prochain chapitre, et dont on retiendra les **formes indéterminées** :

(i) soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$,

si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

(ii) soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$,

si f a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
alors fg a pour limite	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

(iii) soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, $\ell' \neq 0$,

si f a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'<0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Et dans le cas particulier où ℓ' est nul,

si f a pour limite	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0
si g a pour limite	$0+$	$0-$	$0+$	$0-$	0
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple 2 Calculer la limite quand $x \to +\infty$ des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{1 - x^4}\ ,\ g : x \longmapsto \frac{\frac{1}{x}}{2 - \sqrt{4 - \frac{1}{x}}}\ ,\ h : x \longmapsto \ln(1+x^2) - x$$

Remarques

1. On retiendra que pour lever l'indétermination, on peut éventuellement transformer l'expression algébrique donnée : développement, factorisation, multiplication par la quantité conjuguée...

2. On pourra aussi, dans certains cas, abuser de la notation et utiliser le symbole $\sim$ qui donne pour les produits et quotients un moyen rapide d'**identifier les éléments dominants** au voisinage de l'infini. Par contre, on vérifiera à chaque fois les équivalents proposés car par définition, on peut écrire :

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \text{ si le rapport } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ tend vers 1 quand } x \to a.$$

④ Continuité et dérivabilité en des points particuliers

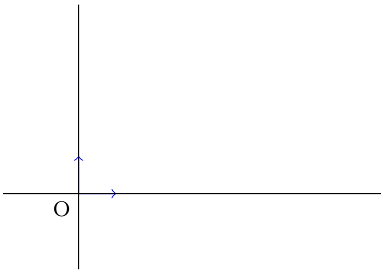
Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. On rappelle que f est **continue** sur I si en tout point $a \in I$, la limite de $f(x)$ existe et vérifie :

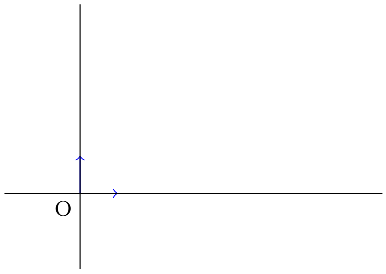
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Remarques

1. Graphiquement, une fonction continue est représentée par un tracé continu.

2. Bien entendu, si on ne s'intéresse qu'à la limite à gauche ou à droite, on précisera que f est **continue à gauche ou à droite** en a. Par exemple :





Propriété 5 (caractérisation de la continuité en un point).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Alors, on admet que f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite de a. Et dans ce cas,

$$\lim_{x \to a, x < a} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a, x > a} f(x)$$

La plupart du temps, les fonctions données sont continues comme composées de fonctions continues sur leur domaine de définition : c'est le cas des fonctions polynômes et rationnelles. Par contre, si elles ne sont pas définies en un point, on pourra les prolonger par continuité en imposant la valeur manquante. On fera donc attention à bien distinguer ces deux notions :

- la **continuité** en un point a, où on vérifie simplement que la limite en a coïncide avec $f(a)$ donnée dans l'énoncé.
- le **prolongement par continuité** pour lequel on doit trouver, en a, une limite finie qu'il suffira alors d'imposer pour prolonger f par continuité.

Exemple 3 Les questions sont indépendantes.

1. On définit la fonction f par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}, \text{ si } x \geq -1, x \neq 0 \\ 2, \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Justifier que f est continue sur $[-1, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ peut être prolongée par continuité en 0.

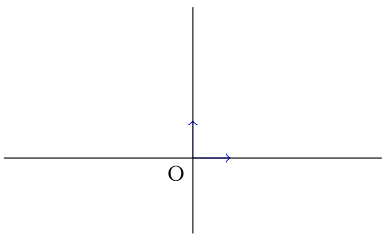
Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. On rappelle que f est **dérivable** sur I si en tout point $a \in I$, le taux d'accroissement :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ admet une limite finie quand } x \text{ tend vers } a.$$

Dans ce cas, cette limite sera appelée **nombre dérivé** de f en a et elle sera notée $f'(a)$. La fonction $f' : x \in I \longmapsto f'(x)$ désigne alors la **dérivée** de la fonction f.

Remarques

1. On sera vigilant sur les notations : on notera $f'(x)$ l'expression de la dérivée de f ou encore $\dfrac{d}{dx}(f(x))$ si besoin.
2. Fixons $a \in I$ et considérons $x \in I$, on note $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ un point courant. Le taux d'accroissement désigne alors le coefficient directeur de la corde (AM) :



La fonction f est dérivable en a si la corde admet une position limite quand x tend vers a : la tangente au point A. Ainsi, $f'(a)$, le nombre dérivé, n'est rien d'autre que le coefficient directeur de la tangente en a qui a pour équation : $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Propriété 6 (caractérisation de la dérivabilité en un point).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Alors, on admet que f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de a avec :

$$\lim_{x \to a, x < a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a, x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemple 4 Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f : x \longmapsto |x|$ en 0.

Remarques

1. On peut en fait montrer que la dérivabilité en un point entraîne la continuité en ce point, en effet si f est dérivable et en notant τ_a le taux d'accroissement, alors :

$$f(x) = f(a) + (x-a)\tau_a(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a) + 0.f'(a) = f(a)$$

   On retiendra néanmoins que la réciproque est fausse.

2. La plupart du temps, les fonctions données sont dérivables comme composées de fonctions dérivables sur leur domaine de définition: c'est le cas des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles ou d'autres fonctions usuelles qui sont même indéfiniment dérivables.

Définition Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. Sous réserve d'existence, on note $f^{(n)}$ la n-ième dérivée de f et plus généralement, on dit que :

- f est de **classe** C^0 **sur** I si f est continue sur I.
- f est de **classe** C^n **sur** I si :

$$\begin{cases} \text{elle est dérivable } n \text{ fois sur } I \\ f^{(n)} \text{ est continue sur } I \end{cases}$$

- f est de **classe** C^∞ **sur** I si f est **indéfiniment dérivable**, c'est à dire de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⑤ Branches infinies et représentation graphique

Définition On se place dans le plan usuel muni d'un repère de centre O. On note f une fonction définie sur D inclus dans $\mathbb{R}$ et $M(x, f(x))$ un point courant appartenant à C_f.
Dans le cas particulier où la distance OM tend vers l'infini, on dit que la courbe C_f associée présente une **branche infinie**.

Propriété 7 (étude des branches infinies)**.**

Soient $a, b, m, p \in \mathbb{R}$.

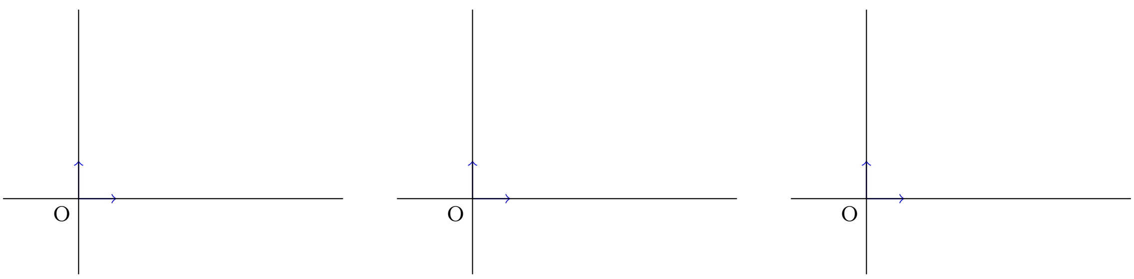
(i) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, alors C_f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.

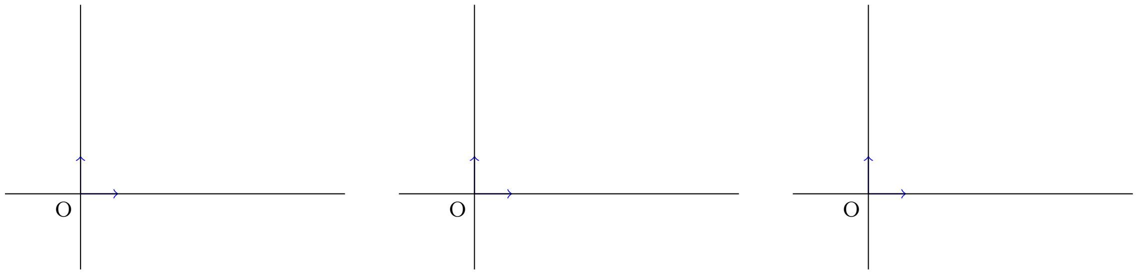
(ii) Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, alors C_f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = b$.

(iii) Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on étudie la limite du rapport $\frac{f(x)}{x}$:

- si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors C_f admet une **branche parabolique** de direction (Oy).
- si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f une **branche parabolique** de direction (Ox).
- • et dans les autres cas, si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$, on étudie la limite de la différence $f(x) - mx$ de sorte que :

$$\begin{cases} \text{si } \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = \pm\infty, \text{ alors } C_f \text{ admet une } \textbf{branche parabolique} \text{ de direction la droite d'équation } y = mx. \\ \text{si } \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = p, \text{ alors } C_f \text{ admet une } \textbf{asymptote oblique} \text{ d'équation } y = mx + p. \end{cases}$$





Exemple 5 Etudier, puis représenter la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1}$. On précisera les points particuliers ainsi que les branches infinies.

1.2 Fonctions majorées, minorées ou bornées

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est **majorée sur** I si les images par f sont majorées sur I, c'est à dire : $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in I,\ f(x) \leq M$.
- f est **minorée sur** I si les images par f sont minorées sur I, c'est à dire : $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in I,\ f(x) \geq m$.
- f est **bornée sur** I si les images sont bornées sur I, c'est à dire :

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in I,\ |f(x)| \leq M$$

Remarque On rappelle que : $\forall\, x \in I,\ |f(x)| \leq M \Leftrightarrow -M \leq f(x) \leq M$, et ainsi toute fonction bornée est à la fois majorée et minorée.

Exemple 6 On considère $f : x \in]0,1] \longmapsto x\ln(x)$. Montrer que f est prolongeable par continuité sur le segment $[0,1]$, puis établir que f est bornée sur $[0,1]$.

Théorème 8 (des bornes atteintes)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ qu'on suppose continue sur I, et considérons $[a,b]$ un segment inclus dans I. Alors, on peut montrer que f est nécessairement bornée sur $[a,b]$ et ses bornes sont atteintes :

$$\exists\, (x_1, x_2) \in [a,b]^2,\ \begin{cases} f(x_1) = \max_{[a,b]} f(x) \\ f(x_2) = \min_{[a,b]} f(x) \end{cases}$$

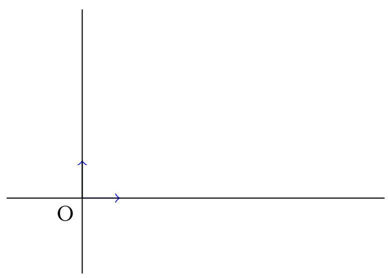
1.3 Théorème de la bijection et bijection réciproque

Théorème 9 (de la bijection)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I qu'on suppose continue et strictement monotone sur I. Alors, $J = f(I)$ est encore un intervalle, et f réalise une **bijection** de I sur J. C'est à dire que :

$$\forall\, y \in J,\ \exists!\, x \in I,\ y = f(x)$$

Représentation Les hypothèses de continuité et de stricte monotonie sont des conditions suffisantes pour obtenir une telle bijection: l'une permettant d'assurer l'existence d'un antécédent, l'autre donnant l'unicité de celui-ci.



En particulier, on retiendra qu'on peut restreindre les intervalles au départ et à l'arrivée pour rendre notre application bijective.

Exemple 7 Montrer qu'il existe une unique solution $\alpha \in]0,+\infty[$ à l'équation $x\ln(x) - 1 = 0$.

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I qu'on suppose bijective de I sur $J = f(I)$.
On appelle alors **bijection réciproque** la fonction notée f^{-1} qui à tout $y \in J$ associe son unique antécédent $x \in I$ par f, de sorte que :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{cases}$$

Propriété 10 (de la bijection réciproque)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I qu'on suppose continue et strictement monotone sur I. Alors, on montrera que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$, et sa bijection réciproque vérifie :

(i) pour tout $(x, y) \in I \times J$, $f^{-1} \circ f(x) = x$ et $f \circ f^{-1}(y) = y$.

(ii) dans un repère orthonormé, les courbes représentatives C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

(iii) f^{-1} est elle-même continue sur J, strictement monotone sur J et de même sens de variations que f.

Théorème 11 (cas particulier de la dérivabilité)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I qu'on suppose dérivable et strictement monotone sur I, et telle que :

$$\forall\, x \in I,\ f'(x) \neq 0$$

Alors, on admet que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$, et que sa bijection réciproque est dérivable sur J de sorte que :

$$\forall\, y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Exemple 8 On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Etudier et représenter f.
2. En déduire qu'il existe une unique fonction g telle que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g \circ f(x) = x$.
3. g désigne en fait la fonction racine carrée. Retrouver alors ses différentes caractéristiques.

Remarques Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n$.

1. On rappelle que par convention $f_0 = 1 \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},\ x^0 = 1$.
2. Si on étudie la fonction $f_n : x \longmapsto x^n$ sur un domaine I bien choisi, on montre qu'elle réalise une bijection et on peut ainsi définir la **racine n-ième d'un nombre réel** ($n \in \mathbb{N}^*$) en posant :

$$f_n^{-1} : x \in J \longmapsto x^{\frac{1}{n}}$$

2 Les fonctions logarithmes et exponentielles

2.1 La fonction logarithme népérien

Définition On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction ln définie comme l'unique primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. C'est à dire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \text{ , ou plus simplement, } \begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \ln(1) = 0 \end{cases}.$$

Propriété 12 (propriétés algébriques)**.**

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, on a :

(i) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

(ii) $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$, et donc $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

(iii) Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\ln(a^r) = r \ln(a)$.

► *On commence par démontrer la première égalité en étudiant une fonction d'une seule variable, puis on utilise celle-ci pour aller chercher les autres propriétés.*

Remarque Dans le reste du cours, on admettra que ce résultat peut être étendu aux nombres réels :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ln(a^x) = x\ln(a)$$

Propriété 13 (limites de référence).

On a :

$$(i)\quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad (ii)\quad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \qquad (iii)\quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \qquad (iv)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

▶ *Pour la première limite, on admet l'existence de cette limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ avant de montrer que $\ell = +\infty$; les autres s'obtiennent astucieusement que ce soit en utilisant un changement de variable, ou en reconnaissant un taux d'accroissement.*

Théorème 14 (étude de la fonction ln).

(i) La fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$: elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

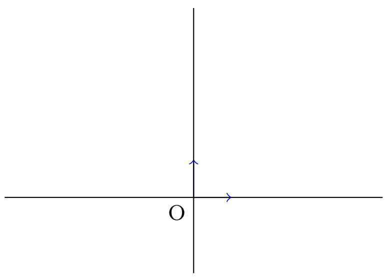
(ii) Dans un repère orthonormé, sa courbe représentative admet deux branches infinies : une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une branche parabolique de direction (Ox).

(iii) La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ de sorte que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$, et ainsi on a l'**inégalité de concavité** :

$$\forall\, X > -1,\ \ln(1+X) \leq X$$

▶ *Seul le dernier point semble délicat; pour cela, il nous suffit d'étudier la fonction* $x \mapsto \ln(x) - 2(\sqrt{x} - 1)$ *avant de passer à la limite dans une inégalité bien choisie...*

Représentation On obtient la représentation graphique de la fonction ln :



En particulier, on pourra retenir le signe de cette fonction : elle est négative sur $]0,1]$ et positive sur $[1,+\infty[$.

Dans une preuve précédente, nous avons vu comment démontrer une propriété algébrique en faisant intervenir une fonction d'une seule variable. Nous allons procéder de la même façon pour résoudre une première **équation fonctionnelle**.

Exemple 9 Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

Définition Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.
On appelle **fonction logarithme de base** a la fonction notée $\log_a$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)}\ln(x)$$

2.2 La fonction exponentielle népérienne

Définition On rappelle que la fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On appelle alors **fonction exponentielle népérienne** sa bijection réciproque notée exp telle que :

$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exp(y) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Corollaire 15 (monotonie et comportement asymptotique).

On en déduit immédiatement :

(i) $\exp(0) = 1$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln \circ \exp(x) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp \circ \ln(x) = x$.

(ii) La fonction exp est également continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

► *Il suffit de faire appel aux différentes propriétés de la bijection réciproque...*

Propriété 16 (propriétés algébriques).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

(i) $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$.

(ii) $\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$, et donc $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

(iii) Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\exp(ra) = (\exp(a))^r$.

► *On commence par prouver la première égalité en faisant intervenir les propriétés de sa bijection réciproque* ln*, puis on utilise celle-ci pour aller chercher les autres propriétés.*

Remarque La dernière assertion nous donne en particulier : $\forall\, r \in \mathbb{Q},\ \exp(r) = \exp(r.1) = (\exp(1))^r$.
Ainsi, en posant $e = \exp(1)$, on est ramené à écrire : $\exp(r) = e^r$. Dans le reste du cours, on choisira d'étendre cette notation puissance aux nombres réels et ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = e^x$$

Propriété 17 (limites de référence).

On a :

$$(i) \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad (ii) \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad (iii) \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

► *Les deux premières limites sont obtenues par définition de la fonction exponentielle comme bijection réciproque du logarithme, et dans la dernière, on reconnaîtra aisément un taux d'accroissement.*

Théorème 18 (étude de la fonction exp).

(i) La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

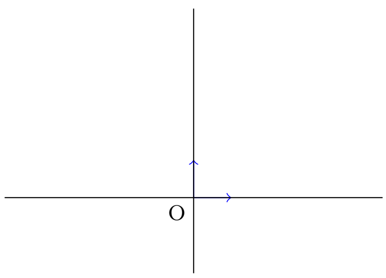
(ii) Dans un repère orthonormé, sa courbe représentative admet deux branches infinies: une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et une branche parabolique de direction (Oy).

(iii) La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$, et ainsi on a l'**inégalité de convexité** :

$$\forall\, X \in \mathbb{R},\ e^X \geq X + 1$$

► *Une fois encore, tout découle des propriétés de la bijection réciproque, dont le tracé s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice.*

Représentation On obtient la représentation graphique de la fonction exp :



En particulier, on pourra retenir le signe de cette fonction : elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

3 Les fonctions puissances

3.1 Définition et règles de calcul

Définition Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance d'exposant réel** α la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

Remarque Il s'agit en fait de prolonger naturellement la notation **puissance d'un nombre entier** définie pour tout $p \in \mathbb{Z}$ par :

$$x^p = \begin{cases} x \times x \times \ldots \times x, \text{ si } p > 0 \\ \dfrac{1}{x^{-p}}, \text{ si } p < 0 \end{cases} \quad \text{, avec la convention } x^0 = 1$$

Propriété 19 (règles de calcul)**.**

On a pour tous $x, y > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(i)\ \ x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad (ii)\ \ (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \quad (iii)\ \ (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad (iv)\ \ \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$$

▶ *Il suffit encore une fois de se ramener à la première définition et d'utiliser les propriétés algébriques de la fonction* exp.

Plus généralement, on peut remarquer que si une fonction nous est donnée sous la forme $u(x)^{v(x)}$, on veillera à chaque fois à se ramener à une écriture sous la forme exponentielle pour en simplifier l'étude.

Exemple 10 Etudier, puis représenter la fonction $f : x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$.

3.2 Croissances comparées des fonctions logarithmes, puissances et exponentielles

Propriété 20 (croissances comparées)**.**

Pour lever certaine indétermination, il est très pratique de connaître le comportement asymptotique des fonctions usuelles les unes par rapport aux autres. On parle de **croissances comparées** :
Pour tous $\alpha, \beta > 0$,

$$(i)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad (ii)\ \lim_{x\to 0} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0 \quad (iii)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty \quad (iv)\ \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta (e^x)^\alpha = 0$$

▶ *On utilise les limites usuelles du logarithme et de la fonction exponentielle pour aller chercher les autres limites par changement de variable ou transformation algébrique.*

4 Applications à la résolution de problèmes fonctionnels

4.1 Décomposition de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et définition des fonctions hyperboliques

On introduit ici les fonctions hyperboliques comme les parties paire et impaire de la fonction exponentielle, ce qui nous permettra de voir notre premier **raisonnement par analyse-synthèse**.

Exemple 11 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Montrer qu'il existe de façon unique une fonction g paire et une fonction h impaire définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$$

Remarque On pourra même retenir la forme des parties paires et impaires d'une fonction donnée. On peut alors remarquer qu'une fonction polynôme se décompose facilement comme somme d'une fonction paire et impaire à partir des seules puissances paires ou impaires.

Définition

- On appelle alors **fonction cosinus hyperbolique** et **fonction sinus hyperbolique** les parties paire et impaire de la fonction exponentielle définies par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R},\ sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- De plus, on définit la **fonction tangente hyperbolique** sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$$

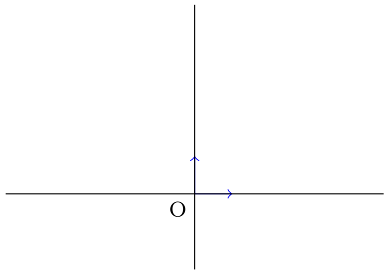
Remarque En particulier, ch est paire, sh est impaire et elles vérifient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = ch(x) + sh(x) \text{ et } e^{-x} = ch(x) - sh(x)$$

Propriété 21 (étude de la fonction ch)**.**

La fonction ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ch'(x) = sh(x)$. On en déduit ses variations sur $\mathbb{R}_+$:

et donc par parité,

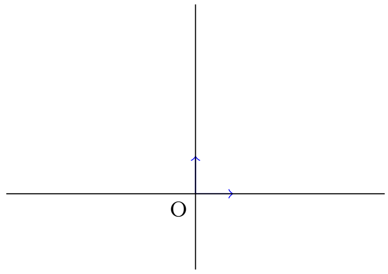


▶ *Il s'agit d'une simple étude de fonction exponentielle qu'on mènera avec soin : domaine de définition, parité...*

Propriété 22 (étude de la fonction sh)**.**

La fonction sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $sh'(x) = ch(x)$. On en déduit ses variations sur $\mathbb{R}_+$:

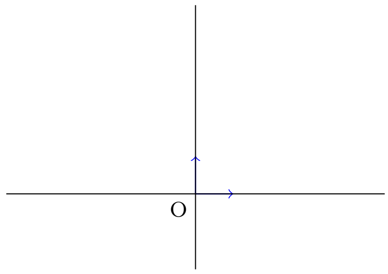
et donc par imparité,



Propriété 23 (étude de la fonction th)**.**

La fonction th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $th'(x) = \dfrac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)$. On en déduit ses variations sur $\mathbb{R}_+$:

et donc par imparité,



Propriété 24 (formulaire hyperbolique)**.**

Soient $x, a, b \in \mathbb{R}$. Alors on a :

(i) $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

(ii) $\begin{cases} ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) & , \ ch(a-b) = ch(a)ch(b) - sh(a)sh(b) \\ sh(a+b) = sh(a)ch(b) + sh(b)ch(a) & , \ sh(a-b) = sh(a)ch(b) - sh(b)ch(a) \end{cases}$

(iii) En particulier, on a les formules de duplication :

$$\begin{cases} ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x) = 2ch^2(x) - 1 = 1 + 2sh^2(x) \\ sh(2x) = 2ch(x)sh(x) \end{cases}$$

▶ *Il suffit de se ramener à la définition des fonctions ch et sh.*

4.2 Primitives et résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ qu'on suppose continue sur I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F de classe C^1 sur I et telle que :

$$\forall\, x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

Propriété 25 (toutes les primitives sont égales à une constante près)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ qu'on suppose continue sur I, et considérons F et G deux primitives de f. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :

$$F = G + \lambda$$

Autrement dit, toutes les primitives sont égales à une constante près.

► *On étudie la fonction différence et on montre que la dérivée est nulle sur I.*

Remarques

1. Généralement, pour déterminer une primitive d'une fonction donnée, on cherche à remonter le tableau des dérivées usuelles ou de leurs composées :

On considère f définie par $f(x) = ...$	alors f est dérivable sur $I = ...$	et pour tout $x \in I$, $f'(x) = ...$
x^α $(x > 0)$	$]0, +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$ $(x > 0)$	$]0, +\infty[$	$1/2\sqrt{x}$
$1/x$ $(x > 0)$	$]0, +\infty[$	$-1/x^2$
e^x $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln\|x\|$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^*$	$1/x$
$\sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$ $(x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\})$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$sh(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$ch(x)$
$ch(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$sh(x)$
$th(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)$
$\arcsin(x)$ $(-1 \leq x \leq 1)$	$]-1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$ $(-1 \leq x \leq 1)$	$]-1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

et il faudra donc adapter celles-ci pour les fonctions composées :

si f est de la forme...	alors f' sera de la forme...
u^α	$\alpha u'.u^{\alpha-1}$
$\sqrt{u}$	$u'/2\sqrt{u}$
$1/u$	$-u'/u^2$
e^u	$u'.e^u$
$\ln\|u\|$	u'/u
$\cos(u)$	$-u'.\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'.\cos(u)$
$\tan(u)$	$\frac{u'}{\cos^2(u)} = u'.(1 + tan^2(u))$
$sh(u)$	$u'.ch(xu)$
$ch(u)$	$u'.sh(u)$
$th(u)$	$\frac{u'}{ch^2(u)} = u'.(1 - th^2(u))$
$\arcsin(u)$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos(u)$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arctan(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$

2. On peut aussi utiliser le symbole intégrale pour définir une primitive, mais on fera très attention à la notation :

$$\int_a^x f(t)\,dt \text{ désigne l'unique primitive de } f \text{ qui s'annule en } a \in I.$$

Exemple 12 On pose $f : t \in]0, +\infty[\longmapsto \dfrac{sh(t)}{t}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité sur $[0, +\infty[$.
2. Etudier alors F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Définition On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** toute équation définie sur un intervalle I et d'inconnue $y \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ de la forme :
$$y' + a(x)y = b(x) \quad (\mathcal{E})$$
où a et b désignent des fonctions continues sur I à valeurs réelles.
En particulier, on appelle **solution de** $\mathcal{E}$ toute fonction f dérivable sur I et vérifiant :
$$\forall\, x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

Théorème 26 (solutions d'une EDL du premier ordre sans second membre)**.**

Considérons $\mathcal{E}_0$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre définie par : $y' + a(x)y = 0$, avec a une fonction continue sur un intervalle I, et notons S_0 l'ensemble des solutions de cette équation. Alors, on a :
$$S_0 = \{x \in I \longmapsto \lambda e^{-A(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$
où A désigne une primitive de a sur I.

► *L'ensemble des solutions étant donné, on procédera ici par double inclusion.*

Théorème 27 (solutions d'une EDL du premier ordre avec second membre)**.**

Considérons $\mathcal{E}$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre définie par : $y' + a(x)y = b(x)$, avec a, b deux fonctions continues sur un intervalle I, et notons S l'ensemble des solutions de cette équation. On suppose de plus qu'il existe f_p une solution particulière de $\mathcal{E}$ sur I.
Alors, on a :
$$S = \{x \in I \longmapsto f_p(x) + \lambda e^{-A(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$
où A désigne une primitive de a sur I.

► *L'ensemble des solutions étant donné, on procédera encore par double inclusion sans oublier que f_p vérifie $\mathcal{E}$.*

Remarques

1. On admet en fait que pour une telle équation différentielle linéaire, il existe toujours une solution particulière f_p, mais pour la trouver, ce ne sera pas simple... et on verra plus tard comment faire. A ce stade de l'année, on pourra toujours s'inspirer du second membre pour déterminer une telle solution particulière.
2. S désigne donc un ensemble de solutions définies sur l'intervalle I : on parle aussi de **faisceau de solutions**. D'ailleurs, en physique, l'utilisation des conditions initiales vous permettront à chaque fois d'identifier l'unique fonction qui régit le système.

Exemple 13 Résoudre l'équation différentielle $\mathcal{E}$ définie sur $]0, +\infty[$ par :
$$y' - \frac{1}{x+1}.y = x + 1 \quad (\mathcal{E})$$