TD supplémentaire 1

Ces TD représentent avant tout des thèmes d'étude classiques qu'il faudra maitriser pour les concours. Mais ils vous permettront aussi de prendre un peu de recul sur les objets manipulés en classe, et de mieux comprendre les tenants et les aboutissants du programme enseigné sur les deux années.

Il existe de nombreuses intégrales dont il faut connaitre l'étude. S'il est très utile de connaitre les résultats associés, cela nous donnera également des pistes de travail pour étudier des intégrales moins connues. Par exemple, on s'intéresse ici à l'étude de deux intégrales jumelles : les **intégrales de Wallis**.

Définition On définit les **intégrales de Wallis** pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$$

Comportement asymptotique et équivalent

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a la relation : $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ $(*)$.
3. Etablir que la suite $(nI_{n-1}I_n)_{n\geq 1}$ est constante et préciser la valeur de cette constante.
4. Montrer que (I_n) est une suite décroissante de termes positifs.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,
$$\frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$$
6. Déterminer un équivalent de la suite (I_n) au voisinage de l'infini, c'est à dire déterminer une suite (v_n) telle que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{v_n} = 1$$
7. En déduire la nature de la suite (I_n)[1].

On veillera donc à retenir le résultat suivant :

Propriété 1 (un équivalent très utile des intégrales de Wallis)**.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$. Alors,

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Formule explicite associée

8. Soit $p \in \mathbb{N}$. En utilisant la relation de récurrence $(*)$, retrouver alors une définition explicite de I_{2p} et I_{2p+1}.
9. Dans le langage Python, construire finalement le programme *wallis* qui pour tout entier n donné, renvoie la valeur de I_n. On tiendra évidemment compte de la parité de n et noter p le quotient dans la division euclidienne de n par 2.

[1] En deuxième année, ce résultat sera facile à obtenir car on vous donnera des théorèmes de passage à la limite sous le signe intégral... on peut par exemple appliquer le théorème de convergence dominée sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ ou $[0, \frac{\pi}{2}[$.