Chapitre 5

Limite d'une fonction d'une variable réelle et applications

Dans le dernier chapitre, nous avons vu comment définir de façon rigoureuse la limite d'une suite réelle. De la même façon, nous verrons ici comment définir en toute rigueur la limite d'une fonction d'une variable réelle.
Celle-ci nous permettra de mieux comprendre ce que représente la régularité d'une fonction et on pourra alors démontrer des théorèmes fondamentaux en analyse sur les fonctions dérivables.

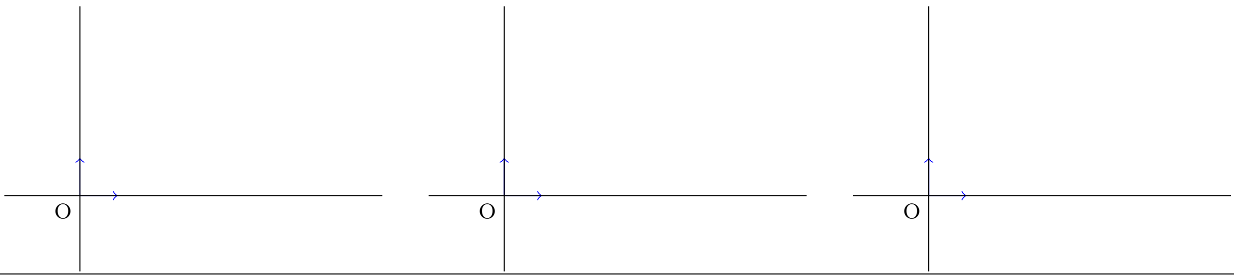
Pour aller plus loin
Dans ce chapitre, nous démontrerons des théorèmes d'analyse très puissants. Si leurs démonstrations sont souvent techniques et plutôt formatrices, il faudra d'abord retenir les résultats associés et leur interprétation : ils vous donneront des outils très pratiques pour affronter des exercices plus formels.

1 Limite d'une fonction d'une variable réelle

1.1 Définition rigoureuse de la limite et conséquences

Définition Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \in I$ (ou éventuellement une borne de I) et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. On note f une fonction définie sur I sauf peut-être en a. On dit que $f(x)$ **tend vers** b **quand** x **tend vers** a si pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage U de a inclus dans D tel que $f(U) \subset V$.
On notera alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ ou encore } f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$$



Remarques

1. On pourra retenir qu'il existe toujours un voisinage de a dans lequel "les images sont piégées autour de b".
2. On fera attention aux différents **voisinages** possibles, c'est à dire que :
   - dans le cas particulier d'un voisinage de $a \in \mathbb{R}$, un tel voisinage sera de la forme $[a-\alpha, a+\alpha]$ avec $\alpha > 0$,
   - dans le cas particulier d'un voisinage de $+\infty$, un tel voisinage sera de la forme $[A, +\infty[$ avec $A > 0$,
   - dans le cas particulier d'un voisinage de $-\infty$, un tel voisinage sera de la forme $]-\infty, A]$ avec $A < 0$.

Propriété 1 (unicité de la limite).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \in I$ (ou éventuellement une borne de I). On note f une fonction définie sur I sauf peut-être en a.
Si $f(x)$ admet une limite b quand x tend vers a, alors celle-ci est unique.

► *On s'inspire de ce qui a été vu pour les suites et on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux limites distinctes...*

Définition Avec les notations de la première définition, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ signifie alors :

(1) dans le cas où $a, b \in \mathbb{R}$, que :
$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$$

(2) dans le cas où $a = +\infty, b \in \mathbb{R}$, que :
$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, A > 0,\ \forall\, x \in I,\ x \geq A \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$$

(3) dans le cas où $a = -\infty, b \in \mathbb{R}$, que :
$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, A < 0,\ \forall\, x \in I,\ x \leq A \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$$

(4) dans le cas où $a \in \mathbb{R}, b = +\infty$, que :
$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq M$$

(5) dans le cas où $a \in \mathbb{R}, b = -\infty$, que :
$$\forall\, m \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq m$$

(6) dans le cas où $a = +\infty, b = +\infty$, que :
$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, A > 0,\ \forall\, x \in I,\ x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M$$

(7) dans le cas où $a = +\infty, b = -\infty$, que :
$$\forall\, m \in \mathbb{R},\ \exists\, A > 0,\ \forall\, x \in I,\ x \geq A \Rightarrow f(x) \leq m$$

(8) dans le cas où $a = -\infty, b = -\infty$, que :
$$\forall\, m \in \mathbb{R},\ \exists\, A < 0,\ \forall\, x \in I,\ x \leq A \Rightarrow f(x) \leq m$$

(9) dans le cas où $a = -\infty, b = +\infty$, que :
$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, A < 0,\ \forall\, x \in I,\ x \leq A \Rightarrow f(x) \geq M$$

Remarque Bien entendu, dans certains cas, on parlera de **limite à droite** ou **limite à gauche**, et ainsi :

$$\lim_{x\to a, x>a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in I \cap [a, +\infty[,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-b| \leq \epsilon$$

$$\lim_{x\to a, x<a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in I \cap]-\infty, a],\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-b| \leq \epsilon$$

Théorème 2 (caractérisation séquentielle de la limite)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \in I$ (ou éventuellement une borne de I) et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \text{pour toute suite } (u_n) \in I^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim u_n = a, \text{ alors } \lim f(u_n) = b$$

► *On procède par double-implication: s'il convient de revenir aux définitions de la limite pour les fonctions et pour les suites dans le sens direct, on veillera à passer par la contraposée pour établir la réciproque.*

Bien souvent, on utilisera cette propriété pour justifier qu'une expression n'a pas de limite en un point, en exhibant deux suites qui tendent vers a mais dont les suites images ne tendent pas vers la même limite.

Exemple 1 Montrer que sin, cos et tan n'ont pas de limite en $+\infty$.

1.2 Opérations sur les limites

Propriété 3 (lemme de majoration et comparaison à des fonctions de limite infinie)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \in I$ (ou éventuellement une borne de I) et $b \in \mathbb{R}$. On note f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en a.

(i) Si $|f(x)-b| \leq g(x)$ au voisinage de a avec $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

(ii) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a avec $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.

(iii) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a avec $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

► *Il s'agit de jouer avec la définition des limites et de choisir à chaque fois des voisinages qui conviennent.*

Remarque Ces techniques de majoration ou minoration sont très pratiques ; elles nous permettront en outre de retrouver toutes les opérations usuelles sur les limites :

Propriété 4 (opérations sur les limites)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \in I$ (ou éventuellement une borne de I). On note f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en a. Alors, les opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$ nous donnent :

(i) soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$,

si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

(ii) soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$,

si f a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors fg a pour limite	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

(iii) soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R},\ \ell' \neq 0$,

si f a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
si g a pour limite	ℓ'	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Et dans le cas particulier où ℓ' est nul,

si f a pour limite	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0
si g a pour limite	$0+$	$0-$	$0+$	$0-$	0
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

1.3 Inégalités et passage à la limite

Propriété 5 (passage à la limite dans les inégalités)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \in I$ (ou éventuellement une borne de I) et $b \in \mathbb{R}$. On note f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en a et on suppose qu'elles admettent toutes les deux une limite en a.
Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.

▶ *Le cas où les limites sont infinies a déjà été traité, et dans le cas de limites finies, on pourra raisonner par l'absurde.*

Remarque Comme pour les suites, on retiendra que ce passage à la limite dans les inégalités, nous donnent encore des inégalités larges.

Théorème 6 (d'encadrement)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \in I$ (ou éventuellement une borne de I) et $b \in \mathbb{R}$. On note f, g, h des fonctions définies sur I sauf peut-être en a.
Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a avec $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b$, alors $\lim_{x \to a} g(x) = b$.

▶ *On revient à la définition de la limite, puis en choisissant un voisinage suffisamment petit, on pourra majorer la différence* $|g(x) - b|$*...*

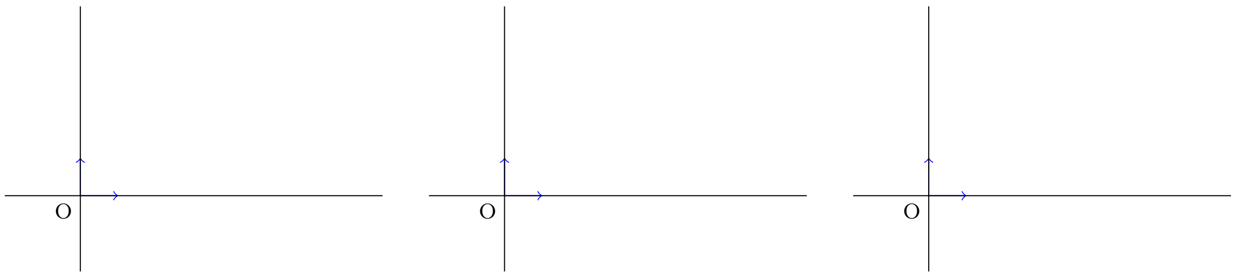
Théorème 7 (de la limite monotone)**.**

Soit f une fonction croissante sur un intervalle $[a, b[$. Alors, f admet une limite en b.
Plus précisément,

- si f est majorée sur $[a, b[$, alors $\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in [a,b[} f(x)$
- si f n'est pas majorée sur $[a, b[$, alors $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$

▶ *On traduit la majoration, et on utilisera la monotonie de f pour se ramener à la définition de la limite.*

Remarque Bien entendu, on peut adapter ce théorème aux fonctions croissantes ou décroissantes sur des intervalles $[a, b[$ ou $]a, b]$:



2 Continuité

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \in I$ (ou éventuellement une borne de I) et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est **continue** en a si elle admet une limite finie en a qui vérifie $\lim_{x \to a, x \neq a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est **continue** sur I si elle est continue en tout point de l'intervalle I.

Interprétation graphique Une telle fonction ne présente donc pas de point de discontinuité, et elle pourra être tracée d'un seul tenant.

Remarques

1. Comme pour les limites, on pourra parler de **continuité à gauche** ou **continuité à droite** :

$$f \text{ est continue à gauche en } a \text{ si } \lim_{x \to a, x < a} f(x) = f(a) \text{ , et } f \text{ est continue à droite en } a \text{ si } \lim_{x \to a, x > a} f(x) = f(a)$$

Par conséquent, une telle fonction sera **continue** en a si elle est continue à gauche et à droite avec :

$$\lim_{x \to a, x < a} f(x) = \lim_{x \to a, x > a} f(x) = f(a)$$

2. Si f désigne une fonction définie et continue sur un intervalle $I-\{a\}$ telle que $\lim_{x\to a} f(x)=b\in\mathbb{R}$, alors on peut construire une nouvelle fonction $\tilde{f}$ qui prolonge f en posant :

$$\begin{cases}\tilde{f}(x)=f(x) \text{ sur } I-\{a\}\\ \tilde{f}(a)=b\end{cases}$$

Ainsi définie, $\tilde{f}$ est continue sur I et elle est appelée **le prolongement par continuité** de f sur I.

Corollaire 8 (caractérisation séquentielle de la continuité)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a\in I$. Alors, la caractérisation séquentielle de la limite nous donne encore :

$$f \text{ est continue en } a \;\Leftrightarrow\; \text{pour toute suite } (u_n)\in I^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim u_n=a, \text{ alors } \lim f(u_n)=f(a)$$

Propriété 9 (algèbre des fonctions continues sur un intervalle)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et notons $C^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.
Alors, la somme de fonctions continues est continue, le produit de fonctions continues est continue et le produit d'une fonction continue par un scalaire est encore continue.

Remarque On dit aussi que $(C^0(I,\mathbb{R}),+,.,\times)$ est une $\mathbb{R}$**-algèbre commutative**.

La plupart du temps, l'étude de la continuité revient à un simple calcul de limite. On cherchera donc à mettre en oeuvre les propriétés précédentes sur les limites.

Exemple 2 Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

$$f : x\in\mathbb{R}\mapsto \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{, si } x\neq 0\\ 0 & \text{, sinon}\end{cases} \quad \text{et } g : x\in\mathbb{R}\mapsto \begin{cases} \sin(1/x) & \text{, si } x\neq 0\\ 0 & \text{, sinon}\end{cases}$$

2.2 Propriétés des fonctions continues

Théorème 10 (des valeurs intermédiaires)**.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On note $J=f(I)$ et on considère $c,d\in J$ tels que $c\leq d$.
Alors, pour tout $y\in[c,d]$, il existe $x\in I$ tel que $y=f(x)$.

► *On peut procéder par dichotomie et introduire des suites adjacentes dont la limite nous donnera un antécédent de y...*

Remarques

1. Plus généralement, on pourra donc retenir que pour une telle fonction continue :
   - ou bien f est constante sur I,
   - ou bien $J=f(I)$ est encore un intervalle.
2. Ce théorème est très utile puisqu'il nous permettra de justifier l'existence d'une solution à une équation de la forme $f(x)=0$: en effet, s'il existe a et b tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé, alors il existe $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)=0$.
3. On peut aussi généraliser le théorème des valeurs intermédiaires. Par exemple, si f est une fonction continue sur $[a,+\infty[$ avec $f(a)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors il existe $x_0\in[a,+\infty[$ tel que : $f(x_0)=\sqrt{17}$.

Théorème 11 (image continue d'un compact)**.**

Une fonction f continue sur un segment $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe $m,M\in\mathbb{R}$ tels que :

$$f([a,b])=[m,M] \text{ avec } m=\min_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } M=\max_{x\in[a,b]} f(x)$$

► *On procèdera en deux temps : on montre d'abord que $f([a,b])$ est bornée, puis on démontre que les bornes sont atteintes en se ramenant à la caractérisation séquentielle des bornes sup et inf.*

Théorème 12 (de la bijection et conséquences)**.**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

(i) Alors, $J = f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I sur J.

(ii) Elle admet donc une bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ qui est continue et de même sens de variations que f.

▶ *Dans le premier point, seule l'injectivité devra être justifiée, les autres résultats étant presque immédiats. Pour le second point, on n'hésitera pas à invoquer la symétrie entre les courbes associées.*

Remarque Ce théorème nous permet en outre de prouver l'existence et l'unicité d'objets mathématiques ; par exemple, c'est comme cela qu'on a construit nos principales bijections réciproques par restriction de certaines fonctions usuelles :

I	f	$f(I)$	f^{-1}
$[0, +\infty[$	$x \mapsto x^n$	$[0, +\infty[$	$y \mapsto y^{1/n}$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}$	$y \mapsto \exp(y)$
$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$x \mapsto \sin(x)$	$[-1, 1]$	$y \mapsto \arcsin(y)$
$[0, \pi]$	$x \mapsto \cos(x)$	$[-1, 1]$	$y \mapsto \arccos(y)$
$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$x \mapsto \tan(x)$	$\mathbb{R}$	$y \mapsto \arctan(y)$

3 Dérivabilité

3.1 Définitions et premières propriétés

Définition Soient f une fonction définie sur I à valeurs réelles et $a \in I$.

- On dit que f est **dérivable en** a si le **taux d'accroissement au point** a admet une limite finie, c'est à dire si :

$$\lim_{x \to a, x \neq a} \tau_a(x) = \lim_{x \to a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et est finie.}$$

  Dans ce cas, la limite sera notée $f'(a)$ et elle sera appelée la **dérivée de** f **en** a**.**

- On dit alors que f est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point de I.

Remarque Comme pour la continuité, on peut également étudier la limite du taux d'accroissement à droite et à gauche et ainsi, f est dérivable en a si et seulement si :

$$\begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ \lim_{x \to a, x < a} \tau_a(x) = \lim_{x \to a, x > a} \tau_a(x) \end{cases}$$

Et dans ce cas, $f'(a) = \lim_{x \to a, x < a} \tau_a(x) = \lim_{x \to a, x > a} \tau_a(x)$.

Exemple 3 Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lambda$ en un point $a \in \mathbb{R}$.

Propriété 13 (caractérisation de la dérivabilité à l'aide d'un développement limité)**.**

Soient f une fonction définie sur I à valeurs réelles et $a \in I$.
Alors, f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a, c'est à dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + (x - a)\epsilon(x) \text{ , avec } \epsilon(x) \underset{x \to a}{\to} 0$$

Et dans ce cas, $\alpha = f'(a)$.

▶ *On raisonne par double-implication, le sens direct étant quasiment immédiat.*

Remarques

1. Localement, une fonction dérivable f peut donc être approchée par sa **tangente** au point a d'équation : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

2. La caractérisation précédente nous donne également le résultat suivant : toute fonction dérivable en un point a est aussi continue en ce point.

Remarque L'utilisation des développements limités sera très pratique pour étudier la régularité d'une fonction donnée. D'ailleurs, ils nous permettent de retrouver toutes les opérations sur les fonctions dérivables :

Propriété 14 (opérations algébriques et dérivées).

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors :

(i) $f + g$ est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I$, $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(ii) $\lambda.f$ est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I$, $(\lambda.f)'(a) = \lambda f'(a)$.

(iii) fg est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I$, $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(iv) si de plus, pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I$,

$$(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

(v) si de plus, pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I$,

$$(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Propriété 15 (dérivée d'une fonction composée).

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur J avec $f(I) \subset J$. Alors, la fonction composée $g \circ f$ est encore dérivable sur I et $\forall\, a \in I$,

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$

► *Encore une fois, on peut se ramener à la caractérisation à l'aide d'un développement limité.*

3.2 Propriétés des fonctions dérivables

Théorème 16 (dérivée de la bijection réciproque).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et strictement monotone, alors $J = f(I)$ est un intervalle et elle admet ainsi une bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ continue.
Si de plus, pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\forall\, b \in J$,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$$

► *On reviendra à la définition par la limite du taux d'accroissement en un point a quelconque, sans oublier de faire appel à la continuité de f^{-1}.*

Définition Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur un intervalle I. Sous réserve d'existence, on définit alors les **dérivées successives** de f par :

$$f^{(0)} = f \text{ et } f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

D'ailleurs, la dérivée n-ième de f pourra aussi être notée $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n}{dx^n} f(x)$.

Propriété 17 (calcul des dérivées successives).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions qu'on suppose n fois dérivables sur I. Alors, on montre que :

(i) $\lambda f + g$ est aussi n fois dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(\lambda f + g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$

(ii) fg est aussi n fois dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad \text{(formule de Leibniz)}$$

► *Il suffit en fait de raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On pourra évidemment faire appel aux opérations sur les fonctions dérivables vues précédemment...*

Définition Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles.

- On dit que f est de **classe** C^0 **sur** I si f est continue sur I.
- Plus généralement, on dit que f est de **classe** C^n **sur** I si elle admet une dérivée n-ième $f^{(n)}$ sur I avec $f^{(n)}$ continue sur I.
- Enfin, on dit que f est **indéfiniment dérivable** ou de **classe** C^∞ **sur** I si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriété 18 (algèbre des fonctions de classe C^n sur un intervalle)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et notons $C^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I à valeurs réelles ($n \in \mathbb{N} \cup \infty$).
Alors, la somme de fonctions de classe C^n est de classe C^n, le produit de fonctions de classe C^n est de classe C^n et le produit d'une fonction de classe C^n par un scalaire est encore de classe C^n.

Remarque On dit encore que $(C^n(I, \mathbb{R}), +, ., \times)$ est une $\mathbb{R}$-**algèbre commutative**.

4 Théorèmes fondamentaux en analyse

4.1 Théorème de Rolle et accroissements finis

Propriété 19 (condition nécessaire d'extremum)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On note $\overset{\circ}{I}$ l'intérieur de I, c'est à dire l'intervalle privé de ses bornes. On suppose de plus que f admet un extremum local en un point $a \in \overset{\circ}{I}$ en lequel f est dérivable. Alors, on a nécessairement $f'(a) = 0$.

► *On revient simplement à la limite du taux d'accroissement au voisinage de a.*

Remarques

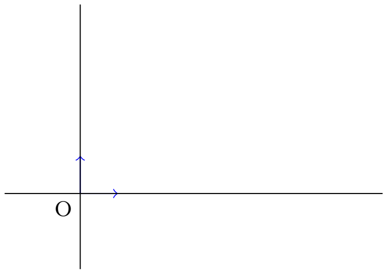
1. Cette propriété ne concerne que les fonctions dérivables : $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ admet un minimum en 0 sans pour autant que les dérivées en 0 soient nulles.
2. Cette propriété est valable en un point $a \in \overset{\circ}{I}$: la fonction $g : x \in [0, 1] \mapsto x$ admet un maximum en 1 et pourtant la dérivée en ce point ne s'annule pas.
3. Cette propriété n'admet pas de réciproque: $h : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ possède une dérivée qui s'annule en 0 sans y admettre d'extremum.

Théorème 20 (de Rolle)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qu'on suppose continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ $(a < b)$. Si de plus $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

► *La fonction f étant continue sur un segment, elle est bornée et atteint ses bornes : on discute alors si elle est constante ou sinon on se ramène à la condition nécessaire d'extremum.*

Interprétation graphique Avec les conditions du théorème, cela signifie qu'il existe un point en lequel la tangente est horizontale.



Exemple 4 Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ qu'on suppose de classe C^1 telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. On note:

$$g : x \in [-1, 1] \mapsto 2x^4 + x + f(x)$$

Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.

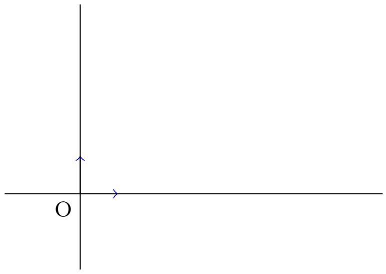
Théorème 21 (des accroissements finis)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qu'on suppose continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ $(a < b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

▶ *Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à une fonction bien choisie...*

Interprétation graphique Avec les conditions du théorème, cela signifie qu'il existe un point en lequel la tangente est parallèle à la corde passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$: il s'agit ici d'une généralisation du théorème de Rolle.



Propriété 22 (inégalité des accroissements finis)**.**

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ qu'on suppose continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ $(a < b)$.

(i) Soient $m, M \in \mathbb{R}$. Si pour tout $x \in]a, b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

(ii) Plus généralement, si pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq g'(x)$, alors $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

▶ *Le premier point découle du théorème des accroissements finis. On pourra alors en déduire le second.*

Remarque Si la fonction est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors on peut définir l'intégrale de f' et dans ce cas, on retrouve facilement ces deux résultats. Par exemple, on a :

$$|f(b) - f(a)| = |\int_a^b f'(t)\ dt| \leq \int_a^b |f'(t)|\ dt \leq \int_a^b g'(t)\ dt = g(b) - g(a)$$

4.2 Théorème limite de la dérivée

Théorème 23 (théorème limite de la dérivée)**.**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overset{\circ}{I}$ tels que :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \text{ et dérivable sur } I - \{a\} \\ f' \text{ admet une limite finie } \ell \text{ en } a \end{cases} \text{, alors } f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = \ell.$$

▶ *On applique le théorème des accroissements finis sur un segment du type $[a, x]$ avant de passer à la limite quand $x \to a, x > a$. On procède de la même façon sur $[x, a]$ avant de conclure quant à la dérivabilité de f en a.*

Remarques

1. Dans le cas particulier où $f'(x) \underset{x \to a}{\to} \pm\infty$, on pourra en déduire que f n'est pas dérivable en a. C'est une autre façon de justifier la dérivabilité de f, mais par contre, si f' n'admet pas de limite quand $x \to a$, on ne pourra rien dire.

2. Si a désigne une extrémité de I, on adaptera la conclusion : dérivable à droite ou à gauche.

Corollaire 24 (théorème limite de la dérivée et prolongement C^1)**.**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overset{\circ}{I}$ tels que :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \text{ et de classe } C^1 \text{ sur } I - \{a\} \\ f' \text{ admet une limite finie } \ell \text{ en } a \end{cases} \text{, alors } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ avec } f'(a) = \ell.$$

On fera attention : ces théorèmes nous donnent une condition suffisante très pratique pour obtenir la régularité de f, et mais s'ils ne s'appliquent pas, on sera obligé de revenir à l'étude du taux d'accroissement.

Exemple 5 Ces fonctions sont-elles de classe C^1 sur leur domaine de définition ?

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{, si } x > 0 \\ 0 & \text{, si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et } g : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{, si } x \neq 0 \\ 0 & \text{, si } x = 0 \end{cases}$$

4.3 Caractérisations à l'aide de la dérivée

Théorème 25 (caractérisation de la monotonie).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ qu'on suppose continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors :

(i) f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0$

(ii) f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0$

(iii) f est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathring{I},\ f'(x) \leq 0$

► *On procède par double-implication. Pour la réciproque, on fera intervenir le théorème des accroissements finis sur un segment de la forme* $[a, b]$.

Remarque Dans le cas particulier où la dérivée ne s'annule qu'en un nombre fini de points $\{a_1, \ldots, a_n\}$:

- si pour tout $x \in \mathring{I} - \{a_i\},\ f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I
- si pour tout $x \in \mathring{I} - \{a_i\},\ f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I

Définition Soit f une fonction définie sur I à valeurs réelles. On dit que f est **lipschitzienne** s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall\, (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Théorème 26 (caractérisation d'une fonction lipschitzienne).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ qu'on suppose dérivable sur I. Alors :

$$f \text{ est lipschitzienne } \Leftrightarrow f' \text{ est bornée sur } I$$

► *On prouve ce théorème par double-implication. Pour la réciproque, on fera intervenir le théorème des accroissements finis sur un segment de la forme* $[a, b]$.

Exemple 6 Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$, et on note :

$$k = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

pour lequel on suppose que $k < 1$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe $c \in [a, b]$.
2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] - \{c\} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   Montrer que la suite (u_n) est convergente de limite c.

Remarque Ce résultat peut aussi être vu comme une propriété à part entière, parfois appelée **théorème de point fixe**, et on pourra donc retenir que pour un système dynamique discret de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f contractante sur le segment $[a, b]$, on a :

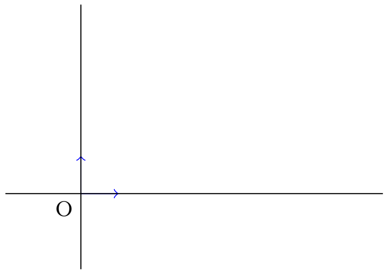
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell, \text{ unique point fixe de } f \text{ sur } [a, b]$$

Définition Soit f une fonction définie sur I à valeurs réelles.

- On dit que f est **convexe** si pour tous $a, b \in I^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

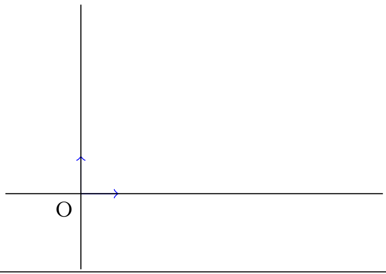
  c'est à dire l'image de tout point du segment $[a, b]$ est toujours en dessous de la corde associée.



- On dit que f est **concave** si pour tous $a, b \in I^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

  c'est à dire l'image de tout point du segment $[a, b]$ est toujours au dessus de la corde associée.



Théorème 27 (caractérisation de la convexité ou concavité)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ qu'on suppose dérivable sur I. Alors :

(i) f est convexe $\Leftrightarrow$ f' est croissante sur I

(ii) f est concave $\Leftrightarrow$ f' est décroissante sur I

► *Dans le sens direct, on fixe $x \in]a, b[$ avant de comparer les pentes obtenues. Pour la réciproque, en posant $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, on appliquera le théorème des accroissements finis sur $[a, x]$ et $[x, b]$.*

Remarque Bien entendu si f est deux fois dérivable, on ira d'abord chercher le signe de f" !

Exemple 7 Montrer que la fonction sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et en déduire : $\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \dfrac{2x}{\pi} \leq \sin(x)$.

Propriété 28 (courbe représentative et tangente)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ qu'on suppose dérivable sur I. En particulier,

(i) si f est convexe, alors sa courbe représentative est toujours au dessus de ses tangentes.

(ii) si f est concave, alors sa courbe représentative est toujours en dessous de ses tangentes.

► *Il suffit d'étudier la position relative de C_f et T_a, pour tout $a \in I$.*

Exemple 8 Etablir les inégalités suivantes :

$$\forall\, x > 0,\ \ln(x) \leq x - 1 \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x + 1$$

5 Applications

5.1 Les notations de Landau

Définition Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose de plus que pour tout $x \in I - \{a\}$, $g(x) \neq 0$.
On dit que la fonction f est **négligeable devant la fonction** g **au voisinage de** a s'il existe $\epsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de limite nulle en a telle que :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = \epsilon(x)g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On notera alors : $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

Définition Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose de plus que pour tout $x \in I - \{a\}$, $g(x) \neq 0$.
On dit que la fonction f est **dominée par la fonction** g **au voisinage de** a s'il existe $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée au voisinage de a :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = b(x)g(x) \Leftrightarrow \text{ la fonction } f/g \text{ est bornée au voisinage de } a$$

On notera alors : $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$.

Définition Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose de plus que pour tout $x \in I - \{a\}$, $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$.
On dit que la fonction f est **équivalente à la fonction** g **au voisinage de** a s'il existe $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de limite 1 en a telle que :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = \gamma(x)g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On notera alors : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$.

Propriété 29 (relations entre ces notations)**.**

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose de plus que pour tout $x \in I - \{a\}$, $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$. Alors,

(i) $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x)) \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$

(ii) $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$

▶ *Il suffit de revenir à la définition de chacune des notations.*

Remarques

1. Ces notations seront utilisées pour comparer le comportement asymptotique de deux fonctions au voisinage d'un point, et ainsi :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \\ f(x) \longrightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \Rightarrow f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$$

2. La relation $\sim$ est la plus pratique, mais on ne l'utilisera que pour simplifier des produits ou des quotients... cela nous évitera de trouver des suites équivalentes à 0. Dans le pire des cas, il faudra de toute façon être en mesure de revenir au quotient pour justifier les équivalents proposés.

3. La plupart du temps, on essaiera donc de faire intervenir nos équivalents de référence :

Propriété 30 (équivalence en 0)**.**

On rappelle que les limites de référence nous donnent de nombreux équivalents en 0 :

1. $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$
2. $\cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1$
3. $\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$
4. $1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^2/2$
5. $\mathrm{sh}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$
6. $\mathrm{ch}(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1$
7. $\mathrm{th}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$
8. $\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x$
9. $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$
10. $\arcsin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$
11. $\arccos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \pi/2$
12. $\arctan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

Propriété 31 (cas particulier des fonctions polynômes et fonctions rationnelles).

On considère une fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, avec p, q des fonctions polynômes de coefficients dominants a_n, b_m et dont on note a_k, b_l les coefficients de plus bas degré.
Alors,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \text{ et } f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{a_k x^k}{b_l x^l}$$

► *On factorise par les termes associés afin de se ramener à la définition des fonctions équivalentes.*

Exemple 9 Calculer la limite quand $x \to 0$ de $(1-\cos(x))^{1/\ln(x)}$.

5.2 Convergence des sommes de Riemann

Définition Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \in I$ (ou éventuellement une borne de I) et $f : I \to \mathbb{R}$. On rappelle qu'une telle fonction f est **continue** sur I si elle est continue en tout point $a \in I$, c'est à dire :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \alpha_a > 0,\ \forall\, x \in I,\ |x-a| \leq \alpha_a \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

On dit alors que f est **uniformément continue** sur I si :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x, y \in I,\ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

Interprétation graphique Il n'est pas facile d'interpréter graphiquement cette particularité, mais on pourra retenir qu'elle rend solidaire sur tout l'intervalle I les écarts entre les abscisses et ceux des ordonnés : pour toute précision donnée, il existe un voisinage global pour lequel, dès lors que x et y sont dans ce voisinage, $f(x)$ et $f(y)$ sont relativement proches.

Remarques

1. On a par exemple : les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues.
2. De plus, toute fonction uniformément continue sur I y est continue de sorte que :

$$f \text{ lipschitzienne} \Rightarrow f \text{ uniformément continue} \Rightarrow f \text{ continue}$$

Théorème 32 (de Heine).

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, on admet que f est uniformément continue sur $[a, b]$.

► *Il suffit de raisonner par l'absurde. On utilisera alors le théorème de Bolzano-Weierstrass...*

Théorème 33 (convergence des sommes de Riemann).

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et on note $s = (x_i)$ la subdivision à pas constant définie pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ par $x_i = a + i.\dfrac{b-a}{n}$.
On appelle **somme de Riemann associée à cette subdivision** la somme :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(c_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{b-a}{n}) f(c_i) \text{ , avec } c_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Alors, on a encore : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\, dt$.

► *On majore la différence entre la suite et sa limite à l'aide des propriétés de l'intégrale. On fera alors appel au théorème de Heine pour contrôler cette différence sur le segment $[a, b]$.*

Ce théorème nous permet en fait de justifier la convergence de certaines méthodes d'approximation d'intégrales, par exemple :

- si pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $c_i = x_i$, alors on parle de la **méthode des rectangles à gauche** ;
- si pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $c_i = x_{i+1}$, alors on parle de la **méthode des rectangles à droite**.

Malgré tout, on essaiera d'abord de retenir le cas particulier du segment $[0, 1]$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\, dt \text{ , ou encore } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\, dt$$

Exemple 10 Déterminer, de deux façons, la limite de $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.