

## Les suites réelles

*Après avoir introduit les premières fonctions usuelles, nous abordons ici un chapitre fondamental de l'analyse : les suites réelles et leurs applications. Si nous avons déjà travaillé sur quelques suites particulières, les propriétés sont encore nombreuses, et ce chapitre nous donnera l'occasion de fournir, pour la première fois, une définition rigoureuse de la limite.*

<b>1 Etude d'une suite réelle</b>	<b>2</b>
1.1 Premières définitions : de la valeur absolue à la notion de convergence . . . . .	2
1.2 Opérations sur les limites et inégalités . . . . .	3
1.3 Cas particulier des limites infinies . . . . .	5
<b>2 Quelques critères de convergence</b>	<b>5</b>
2.1 Théorème de convergence monotone . . . . .	5
2.2 Cas particulier des suites adjacentes . . . . .	6
2.3 Caractérisation à l'aide de suites extraites . . . . .	6
<b>3 Exemples de suites récurrentes</b>	<b>7</b>
3.1 Suites arithmético-géométriques . . . . .	7
3.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 . . . . .	8
3.3 Système dynamique de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . . .	8
<b>4 Applications</b>	<b>9</b>
4.1 Les notations de Landau . . . . .	9
4.2 Convergence des sommes de Cesaro . . . . .	9
4.3 Parties denses de $\mathbb{R}$ . . . . .	10

### Pour aller plus loin

Les suites numériques sont au coeur de nombreux chapitres, et les résultats associés sont fondamentaux d'autant qu'ils permettent de caractériser de nombreuses propriétés en analyse : ce sont les caractérisations séquentielles. D'ailleurs, en spé, vous verrez qu'on peut même étudier la notion de convergence dans tout espace vectoriel normé, et cela fera l'objet de très beaux exercices d'analyse.

# 1 Etude d'une suite réelle

## 1.1 Premières définitions : de la valeur absolue à la notion de convergence

**Définition** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On rappelle que la **valeur absolue** de  $x$  désigne le nombre réel noté  $|x|$  tel que :

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{sinon} \end{cases}$$

### Propriété 1 (immédiate).

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Alors, on a :

- (i)  $|x| \geq 0$
- (ii)  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (iii)  $\sqrt{x^2} = |x|$
- (iv)  $|xy| = |x||y|$  et pour tout  $y \neq 0$ ,  $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

► A chaque fois, on peut ou bien revenir à la définition de la valeur absolue, ou utiliser (iii) quand celui-ci aura été démontré.

### Propriété 2 (inégalité triangulaire et inégalité triangulaire inversée).

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Alors, on a :

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

► On commence par montrer la seconde inégalité en élevant au carré. On en déduit la seconde astucieusement.

### Remarques

- On pourra adapter l'énoncé et obtenir ainsi **un autre encadrement très pratique** de la différence :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$

- La valeur absolue nous permet en fait de définir la **distance** entre deux réels. Ainsi, si on fixe  $a \in \mathbb{R}$  et  $\epsilon > 0$ , on peut aisément représenter l'ensemble des nombres  $\{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \epsilon\}$  :



et on retiendra l'équivalence :

$$|x - a| \leq \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$$

**Définition** On appelle alors **suite réelle** toute application  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  ou une partie de  $\mathbb{N}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$u : n \longmapsto u(n) \underset{\text{not.}}{=} u_n$$

Elle sera notée  $u$  ou  $(u_n)$ . Pour finir, on notera aussi  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque** Généralement, ces suites peuvent être définies :

- par une **formule explicite**, directement en fonction de  $n$ . Par exemple,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin(\sqrt{n^2 + 1})$$

- par une **formule de récurrence**, c'est à dire une relation entre les termes consécutifs de la suite. Par exemple,

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

- par une **formule implicite**, quand le terme général est solution d'une équation dépendant de  $n$ . Par exemple,

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  désigne l'unique solution de  $x^n + x - 1 = 0$  sur  $[0, 1]$

**Définition** Soit  $u$  une suite à valeurs réelles telle que  $U = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ . On dit que la suite :

- $u$  est **majorée** si la partie  $U$  est majorée, c'est à dire qu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$

- $u$  est **minorée** si la partie  $U$  est minorée, c'est à dire qu'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$$

- $u$  est **bornée** si la partie  $U$  est bornée, c'est à dire qu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M \Leftrightarrow -M \leq u_n \leq M \Leftrightarrow \text{elle est à la fois majorée et minorée.}$$

**Définition** Soit  $u$  une suite à valeurs réelles. On dit que la suite  $u$  est **convergente** s'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  pour laquelle les éléments  $u_n$  sont tous au voisinage de  $\ell$  à partir d'un certain rang :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

C'est à dire que dans  $\mathbb{R}$  :

$$|u_n - \ell| \leq \epsilon \Leftrightarrow \ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon$$

Dans le cas contraire, on dira qu'une telle suite est **divergente**.

**Remarque** On pourra ainsi retenir qu'une suite  $u$  converge vers un réel  $\ell$  si et seulement si la distance  $|u_n - \ell|$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### Théorème 3 (unicité de la limite).

Soit  $u$  une suite à valeurs réelles qu'on suppose convergente. Alors, sa limite est unique et elle sera notée  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ou simplement  $\lim u_n$ .

► On raisonne par l'absurde avant de jouer sur les voisinages autour des limites  $\ell_1$  et  $\ell_2$ .

**Remarque** Dans le cas où la suite est définie sous forme explicite, cela revient à déterminer la limite de la fonction associée quand  $n \rightarrow +\infty$ . On n'hésitera donc pas à utiliser les limites de référence.

### Propriété 4 (toute suite convergente est bornée).

Soit  $u$  une suite à valeurs réelles qu'on suppose convergente. Alors, elle est nécessairement bornée.

► On traduit simplement la convergence afin de trouver un majorant de  $|u_n|$  à partir d'un certain rang, les autres éléments étant en nombre fini, il est facile d'en extraire un majorant global.

**Remarque** La réciproque est fautive : il existe des **contre-exemples** de suites bornées qui ne convergent pas, comme par exemple  $(-1)^n$  ou encore  $\sin(n)$ .

### Propriété 5 (combinaison linéaire de suites de limite nulle).

Soient  $u, v$  deux suites à valeurs réelles qu'on suppose de limite nulle, et considérons  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors,  $\lim \lambda u_n + v_n = 0$ .

► On revient à la définition de la limite et on jouera sur les rangs à partir desquels  $|u_n|$  et  $|v_n|$  sont majorés.

## 1.2 Opérations sur les limites et inégalités

### Propriété 6 (comparaison locale).

Soit  $u$  une suite à valeurs réelles qu'on suppose convergente vers une limite  $\ell > 0$ . Alors, il existe un rang  $N$  tel que :

$$\forall n \geq N, u_n > 0$$

► Il suffit de traduire la convergence de la suite pour  $\epsilon = \ell/2$ ...

**Propriété 7 (lemme de majoration).**

Soit  $\ell \in \mathbb{R}$  et on considère  $\alpha$  une suite réelle positive tendant vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \alpha_n$$

Alors, la suite  $u$  est convergente de limite  $\lim u_n = \ell$ .

► Il suffit de traduire la limite de  $\alpha$  puis d'utiliser la transitivité de la relation d'ordre.

**Remarque** Il ne s'agit pas du théorème d'encadrement, mais bien d'un lemme de majoration très pratique quand on veut justifier la convergence d'une suite.

**Exemple 1** On considère la suite  $u$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sin(\frac{u_n}{2})$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin(x)| \leq |x|$ .
2. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0|$ .
3. En déduire que la suite  $u$  est convergente.

**Propriété 8 (opérations algébriques).**

Soient  $u, v$  des suites convergentes de limites  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors:

- (i) la suite  $u + v$  est convergente de limite  $a + b$ ,
- (ii) la suite  $\lambda.u$  est convergente de limite  $\lambda.a$ ,
- (iii) la suite  $u \times v$  est convergente de limite  $a \times b$ ,
- (iv) la suite  $|u|$  est convergente de limite  $|a|$ .
- (v) si de plus  $a \neq 0$ , la suite  $\frac{1}{u}$  est définie à partir d'un certain rang, et elle est convergente de limite  $\frac{1}{a}$ .

► On se ramène au théorème de majoration en majorant la différence par quelque chose qui tend vers 0.

**Remarque** Attention, les implications réciproques ne sont pas vraies : on peut considérer  $u_n = n$  et  $v_n = -n$ ...

**Propriété 9 (passage à la limite dans les inégalités larges).**

Soient  $u, v$  des suites à valeurs réelles qu'on suppose convergentes et  $m, M \in \mathbb{R}$ .

- (i) Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq M$ , alors  $\lim u_n \leq M$ .
- (ii) Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq m$ , alors  $\lim u_n \geq m$ .
- (iii) Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$ , alors  $\lim u_n \leq \lim v_n$ .

► Pour les deux premiers points, on peut raisonner par l'absurde. Le dernier point découle alors de (i) et (ii).

**Remarque** On retiendra que cette propriété ne s'applique qu'aux inégalités larges. En effet, si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 - \frac{1}{n} < 1$ , alors par passage à la limite, l'inégalité ne peut rester stricte et on écrira :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} \leq 1$ .

**Théorème 10 (d'encadrement).**

Soient  $u, v, w$  des suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$$

Si de plus,  $u$  et  $w$  sont convergentes de même limite  $\ell$ , alors  $v$  est aussi convergente et  $\lim v_n = \ell$ .

► On traduit les deux convergences et en prenant le rang maximum, on en déduit l'encadrement souhaité de  $v_n$ .

**Exemple 2** On considère la suite  $u$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

1. Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ .
2. En déduire la limite de la suite  $u$ .

### 1.3 Cas particulier des limites infinies

**Définition** Soit  $u$  une suite à valeurs réelles.

- On dit que  $u$  **diverge vers**  $+\infty$  si pour n'importe quel réel  $M$ , on peut le "dépasser":

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \Rightarrow u_n \geq M$$

et on écrit alors :  $\lim u_n = +\infty$ .

- On dit que  $u$  **diverge vers**  $-\infty$  si pour n'importe quel réel  $M$ , on peut le "dépasser":

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \Rightarrow u_n \leq M$$

et on écrit alors :  $\lim u_n = -\infty$ .

**Remarque** Ainsi, la notion de divergence recouvre deux idées : c'est à dire qu'une suite réelle pourra diverger dans le sens où elle ne converge pas, ou bien elle pourra diverger vers  $\pm\infty$ .

#### Propriété 11 (opérations sur les limites).

Si on se place dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , alors on pourra prolonger naturellement les opérations algébriques sur les limites à l'exception des formes indéterminées usuelles :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \pm\infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

Bien entendu, il ne faudra pas hésiter à travailler sur l'expression algébrique avant de conclure :

**Exemple 3** Déterminer la limite de  $\frac{u_n}{v_n}$  pour  $u_n = n \sum_{k=1}^n k$  et  $v_n = \sum_{k=1}^n k^2$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

#### Propriété 12 (passage à la limite dans les inégalités larges).

Si on se place dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , alors on pourra aussi prolonger naturellement les inégalités sur les limites de sorte que si  $u, v$  désignent deux suites réelles telles que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

- (i) Si  $\lim u_n = +\infty$ , alors  $v$  est divergente et  $\lim v_n = +\infty$ .
- (ii) Si  $\lim v_n = -\infty$ , alors  $u$  est divergente et  $\lim u_n = -\infty$ .

## 2 Quelques critères de convergence

### 2.1 Théorème de convergence monotone

**Définition** Soit  $u$  une suite à valeurs réelles. On dit que :

- la suite  $u$  est **croissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$  ;
- la suite  $u$  est **décroissante** si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$  ;
- la suite  $u$  est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

On pourra alors parler de **stricte monotonie** quand les inégalités précédentes seront strictes.

#### Remarques

- Si les termes d'une telle suite réelle sont strictement positifs, on aura l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ et de même, } u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

- Une suite croissante est donc minorée par son premier terme  $u_0$  :  $u_{n+1} \geq u_n \geq \dots \geq u_1 \geq u_0$ , et une suite décroissante est donc majorée par son premier terme  $u_0$  :  $u_{n+1} \leq u_n \leq \dots \leq u_1 \leq u_0$ .

**Théorème 13** (de convergence monotone pour une suite croissante).

Soit  $u$  une suite à valeurs réelles qu'on suppose croissante.

- (i) Si  $u$  est majorée, alors elle est convergente et dans ce cas,

$$\lim u_n = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$$

- (ii) Si  $u$  est non majorée, alors elle est divergente de sorte que  $\lim u_n = +\infty$ .

► On introduit l'ensemble  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  avant de se ramener à la définition de la limite.

**Théorème 14** (de convergence monotone pour une suite décroissante).

Soit  $u$  une suite à valeurs réelles qu'on suppose décroissante.

- (i) Si  $u$  est minorée, alors elle est convergente et dans ce cas,

$$\lim u_n = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$$

- (ii) Si  $u$  est non minorée, alors elle est divergente de sorte que  $\lim u_n = -\infty$ .

► On introduit l'ensemble  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  avant de se ramener à la définition de la limite.

Ces deux **théorèmes de convergence monotone** sont fort pratiques : à l'instar du théorème d'encadrement, ils nous permettent aussi, sans même connaître cette limite, de justifier son existence.

**Exemple 4** Montrer que la suite  $u$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  est convergente.

**2.2 Cas particulier des suites adjacentes**

**Définition** Soient  $u, v$  deux suites à valeurs réelles. On dit que ce sont des **suites adjacentes** si :

$$\begin{cases} \text{l'une est croissante,} \\ \text{l'autre est décroissante,} \\ \lim v_n - u_n = 0 \end{cases}$$

**Théorème 15** (de convergence pour les suites adjacentes).

Soient  $u, v$  deux suites à valeurs réelles qu'on suppose adjacentes avec  $u$  croissante  $v$  décroissante. Alors, les suites  $u$  et  $v$  convergent et elles ont la même limite de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$$

► On commence par étudier la suite  $v_n - u_n$  afin de justifier l'inégalité  $u_n \leq v_n$ , puis on fera appel aux deux théorèmes de convergence monotone.

**Remarque** Si on suppose de plus que ces suites sont strictement monotones, l'encadrement précédent pourra s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} < v_n$$

**Exemple 5** On considère les suites  $u$  et  $v$  définies par :

$$\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

1. Montrer  $u$  et  $v$  désignent des suites adjacentes dont on précisera la limite  $\ell$ .
2. En déduire que  $\ell$  n'est pas rationnelle.

**2.3 Caractérisation à l'aide de suites extraites**

**Définition** Soient  $u, v$  deux suites réelles. On dit que  $v$  est une **suite extraite** de  $u$  s'il existe une application  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}$$

**Remarque** Autrement dit, une telle suite est simplement constituée d'éléments  $u_n$  pris dans l'ordre croissant des indices, comme par exemple :

- $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n}$  avec  $\phi : n \mapsto 2n$ , la suite des termes d'indice pair,
- $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n+1}$  avec  $\phi : n \mapsto 2n + 1$ , la suite des termes d'indice impair.

**Définition** Soit  $u$  une suite à valeurs réelles. On appelle alors **valeur d'adhérence** toute limite d'une suite extraite de  $u$ .

**Propriété 16** (suite extraite d'une suite convergente).

- Si  $u$  est une suite convergente de limite  $\ell$ , alors toute suite extraite converge encore vers  $\ell$ . Autrement dit,  $u$  n'admet qu'une seule valeur d'adhérence qui est sa limite.
- Et par contraposée, si une suite admet au moins deux valeurs d'adhérence, alors elle est nécessairement divergente.

► *Le deuxième point découle immédiatement du premier dans lequel il suffit d'utiliser la stricte monotonie de  $\phi$ , application associée à la suite extraite.*

**Remarque** On fera bien attention à ne pas conclure trop vite : si une suite extraite converge, ce n'est pas forcément le cas de la suite elle-même. En effet, la suite  $((-1)^n)$  est divergente et pourtant la suite des termes d'indices pairs converge vers 1.

**Propriété 17** (caractérisation de la limite à l'aide des suites extraites).

Soient  $u$  une suite réelle et  $\ell \in \mathbb{R}$ .

$u$  est convergente de limite  $\ell \Leftrightarrow$  les suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont convergentes de limite  $\ell$

► *Le sens direct a déjà été démontré ; pour la réciproque, on choisira le rang maximum pour que les éléments d'indices pairs et impairs soient simultanément au voisinage de  $\ell$ .*

Ces propriétés sur les suites extraites seront très utiles tant pour justifier la convergence d'une suite, que pour démontrer qu'une suite n'a pas de limite...

**Exemple 6** Montrer que la suite  $(\sin(n\frac{\pi}{2}))$  n'a pas de limite quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Théorème 18** (de Bolzano-Weierstrass).

De toute suite réelle bornée, on peut construire une suite extraite convergente.

► *On peut procéder par dichotomie et montrer qu'on peut extraire une sous-suite convergente.*

**Remarque** Ce résultat est fort pratique en analyse, car on aura souvent des suites bornées et il nous permettra ainsi d'en extraire au moins une sous-suite convergente.

### 3 Exemples de suites récurrentes

#### 3.1 Suites arithmético-géométriques

**Propriété 19** (suites arithmético-géométriques).

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a \notin \{0, 1\}$ . On considère  $u$  la suite récurrente linéaire d'ordre 1 définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Notons  $\ell$  la limite éventuelle de la suite  $u$  et posons  $v_n = u_n - \ell$ , alors  $v$  est une suite géométrique de raison  $a$  de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$$

► *Il suffit de partir de la suite  $v$  ainsi définie...*

### 3.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

#### Propriété 20 (suites récurrentes linéaires d'ordre 2).

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$  avec  $a, c \neq 0$ . On considère  $u$  la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

Définissons  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique associée :  $ar^2 + br + c = 0$ . Alors :

- si  $\Delta \neq 0$ , alors l'équation admet deux solutions distinctes  $r_1$  et  $r_2$  et dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \text{ avec } \lambda, \mu \text{ des constantes déterminées par les conditions initiales}$$

- si  $\Delta = 0$ , alors l'équation admet une solution double  $r_0$  et dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu)r_0^n \text{ avec } \lambda, \mu \text{ des constantes déterminées par les conditions initiales}$$

► On peut démontrer ce résultat par le principe de récurrence forte, l'initialisation étant assurée par les conditions initiales.

**Remarque** Si dans ce chapitre nous travaillons avec des suites réelles, on pourra aussi appliquer ce résultat à des suites complexes. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on ne différencie que deux cas  $\Delta = 0$  ou  $\Delta \neq 0$ .

**Exemple 7** Déterminer la limite de la suite  $u$  définie par  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 8u_{n+2} - 2u_{n+1} - 1u_n = 0$$

### 3.3 Système dynamique de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse ici à la suite récurrente définie par :  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  une fonction à valeurs réelles qu'on suppose définie sur un intervalle  $I$  inclus dans  $\mathbb{R}$ .

#### Propriété 21 (intervalle stable).

Avec les notations précédentes, on note  $J \subset I$  un intervalle stable par  $f$ , c'est à dire que  $f(J) \subset J$ . Si  $u_0 \in J$ , alors la suite  $u$  est entièrement définie et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in J$ .

► On établit ce résultat par une simple récurrence sur  $n$ .

#### Propriété 22 (monotonie de la suite).

Si de plus on suppose que  $f$  est monotone sur un intervalle stable  $J$ . Alors,

- si  $f$  est croissante, la suite  $u$  est monotone et son sens de variation dépend du signe de  $u_1 - u_0$ ,
- si  $f$  est décroissante, on s'intéresse aux suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  qui seront toutes deux monotones et dont le sens de variations dépendra du signe de  $u_2 - u_0$  et  $u_3 - u_1$ .

► On établit ce résultat par une simple récurrence sur  $n$ .

#### Propriété 23 (recherche de la limite).

Pour finir, on suppose que  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$  stable par  $f$ . Si de plus la suite  $u$  converge dans  $I$ , alors sa limite est un **point fixe** vérifiant :  $f(\ell) = \ell$ .

► Il suffit de passer à la limite dans l'égalité  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Généralement, quand une telle suite nous sera donnée, on essaiera d'adopter le plan d'étude suivant :

- on détermine les points fixes éventuels,
- on recherche des intervalles stables par  $f$ ,
- selon la valeur de  $u_0$ , on discerne les cas en essayant de mettre en oeuvre le théorème de convergence monotone.

**Exemple 8** On définit la suite  $u$  par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8) \end{cases}$$

Suivant les valeurs de  $u_0$ , étudier la nature de la suite  $u$ .



## 4 Applications

### 4.1 Les notations de Landau

**Définition** Soient  $u, v$  deux suites à valeurs réelles pour lesquelles on suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \neq 0$ . On dit que la suite  $u$  est **négligeable devant la suite**  $v$  s'il existe  $(a_n)$  une suite de limite nulle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n v_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

On notera alors :  $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ .

**Définition** Soient  $u, v$  deux suites à valeurs réelles pour lesquelles on suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \neq 0$ . On dit que la suite  $u$  est **dominée par la suite**  $v$  s'il existe  $(b_n)$  une suite bornée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = b_n v_n \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée}$$

On notera alors :  $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ .

**Définition** Soient  $u, v$  deux suites à valeurs réelles pour lesquelles on suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq 0$ ,  $v_n \neq 0$ . On rappelle que la suite  $u$  est **équivalente à la suite**  $v$  s'il existe  $(a_n)$  une suite de limite 1 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n v_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

On notera alors :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ .

#### Propriété 24 (relations entre ces notations).

Soient  $u, v$  deux suites à valeurs réelles pour lesquelles on suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq 0$ ,  $v_n \neq 0$ . Alors,

- (i)  $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Rightarrow u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$
- (ii)  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$

► Il suffit de revenir à la définition de chacune des notations.

#### Remarques

- Ces notations seront utilisées pour comparer le comportement asymptotique de deux suites réelles, et ainsi :

$$\begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

- La relation  $\sim$  est la plus pratique, mais on ne l'utilisera que pour simplifier des produits ou des quotients... cela nous évitera de trouver des suites équivalentes à 0. Dans le pire des cas, il faudra de toute façon être en mesure de revenir au quotient pour justifier les équivalents proposés.
- Avec les suites réelles, il n'y aura pas d'ambiguïté et on ne sera pas obligé de préciser à chaque fois qu'on travaille à l'infini.

#### Exemple 9

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $\tan(x) = x$  admet une unique solution  $x_n$  dans l'intervalle  $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ .
- Donner un équivalent immédiat de  $x_n$  et en déduire sa limite.
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\arctan(x_n) = x_n - n\pi$ , puis que :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$$

### 4.2 Convergence des sommes de Cesaro

#### Propriété 25 (cas de la moyenne arithmétique).

Soit  $u$  une suite réelle qu'on suppose convergente de limite  $\ell$ . Alors, la suite des **sommes de Césaro** définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k, \text{ est convergente de limite } \ell.$$

► On revient à la définition de la limite en essayant de majorer la différence  $|S_n - \ell|$ ...

**Exemple 10** Déterminer la limite de la série définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

**Corollaire 26** (équivalent d'une somme partielle dans le cas d'une limite non nulle).

Soit  $u$  une suite réelle qu'on suppose convergente de limite  $\ell \neq 0$ . Alors, on a un équivalent immédiat de la somme partielle :

$$\sum_{k=1}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\ell$$

### 4.3 Parties denses de $\mathbb{R}$

**Définition** Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $A$  est **dense** dans  $\mathbb{R}$ , qu'on notera  $\overline{A} = \mathbb{R}$ , si pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  distincts :

$$[x, y] \cap A \neq \emptyset$$

c'est à dire que tout intervalle de  $\mathbb{R}$  contient au moins un point de  $A$ .

**Propriété 27** (caractérisation séquentielle).

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Alors :

$$\overline{A} = \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ il existe une suite } (x_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que : } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

► On procède par double implication : pour le sens direct, on construira une telle suite en considérant l'intervalle  $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$ .

**Propriété 28** (densité de sous-ensembles particuliers).

On note  $\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^n}, (a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$  l'ensemble des nombres décimaux et on considère  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels et  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres irrationnels. Alors :

- (i)  $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}$ . Autrement dit, tout nombre réel peut être vu comme la limite d'une suite de nombres décimaux.
- (ii)  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ . Autrement dit, tout nombre réel peut être vu comme la limite d'une suite de nombres rationnels.
- (iii)  $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ . Autrement dit, tout nombre réel peut être vu comme la limite d'une suite de nombres irrationnels.

► Pour les deux premiers points, on pourra faire appel à la suite  $(x_n)$  des valeurs approchées par défaut de  $x$ . Pour le dernier point, on reviendra encore à la caractérisation séquentielle de la densité.

**Remarque** Les résultats de densité sont importants et ils nous permettront à chaque fois d'en tirer deux conséquences. Par exemple, si on considère que  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ , alors tout nombre réel peut être vu comme la limite d'une suite de rationnels, et ainsi :

- on pourra souvent étendre des propriétés sur  $\mathbb{Q}$  à  $\mathbb{R}$  par un simple passage à la limite.
- tout nombre réel peut être approché de part et d'autre par des nombre rationnels dont on contrôle la distance.

C'est d'ailleurs ce type d'approximation qui nous donnera les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment !

**Exemple 11** Déterminer l'ensemble des fonctions  $f$  définies et continues sur  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$