Chapitre 3

Cas particulier des fonctions trigonométriques

Dans ce chapitre, nous continuons le travail sur les fonctions usuelles et nous redéfinissons les fonctions trigonométriques. Si celles-ci sont définies à partir de la géométrie euclidienne, elles nous donneront de nombreuses applications à l'analyse en raison de leurs différentes propriétés opératoires.

Pour aller plus loin

Les fonctions trigonométriques sont une source importante d'exercices ou de sujets de concours, que ce soit en analyse où il est courant de travailler sur des expressions trigonométriques, ou en algèbre où ces fonctions nous donnent une famille orthogonale très pratique pour décomposer certaines fonctions données... et cela même si les séries de Fourier ne sont plus au programme des concours.

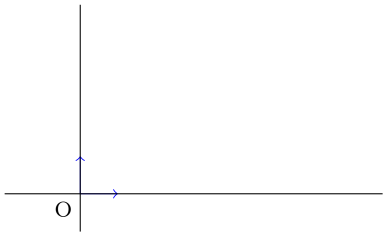
1 Etude d'une fonction périodique

Définition Soit f une fonction définie sur D inclus dans $\mathbb{R}$. On dit que f est **périodique** de période T si :

$$\begin{cases} \forall\, x \in D,\ x + T \in D \\ \forall\, x \in D,\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

On dit aussi que f est T-périodique.

Représentation Pour une telle fonction, on peut observer que la courbe représentative associée "se répète" par translation de vecteur $\pm T\,\overrightarrow{i}$.

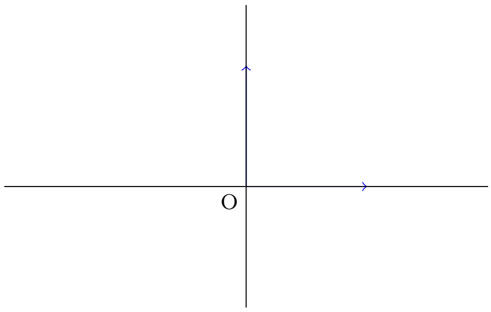


Ainsi, pour étudier une fonction périodique, il suffira de se restreindre à un intervalle d'amplitude T et de compléter la courbe par simple translation.

2 Les fonctions circulaires et leur représentation graphique

2.1 Présentation du cercle trigonométrique et premières propriétés

Définition Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère le cercle trigonométrique et on note M un point du cercle tel que l'angle de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$:



- On appelle alors **fonction cosinus** la fonction notée cos définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos(x) = x_M$.
- On appelle alors **fonction sinus** la fonction notée sin définie sur $\mathbb{R}$ par $\sin(x) = y_M$.
- Et sous réserve d'existence, on définira la **fonction tangente** notée tan et définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Propriété 1 (formulaire trigonométrique)**.**

Sous réserve d'existence, on retrouve à partir du cercle trigonométrique les relations suivantes :

les relations immédiates

(i) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

(ii) $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$...

les formules d'addition

(i) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$,

(ii) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$, $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

(iii) En particulier,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \text{ et } \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

les équations trigonométriques

(i) $\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a = b\ [2\pi]$ ou $a = -b\ [2\pi]$

(ii) $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow a = b\ [2\pi]$ ou $a = \pi - b\ [2\pi]$

► *Si les premières relations sont immédiates, on prendra soin de justifier les deux formules d'addition* $\cos(a+b)$ *et* $\sin(a+b)$ *avant d'en déduire les autres.*

Propriété 2 (autres transformations algébriques)**.**

Sous réserve d'existence, on a aussi les transformations suivantes :

les linéarisations de produit en somme

(i) $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$

(ii) $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

(iii) $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$

(iv) En particulier,

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

les transformations de somme en produit

(i) $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$

(ii) $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

(iii) $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$

(iv) $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

► *Les premières formules découlent du formulaire trigonométrique. Pour les suivantes, on essaiera de reconnaître des opérations en* $\cos(a+b)$ *et* $\sin(a+b)$*...*

Propriété 3 (limite de référence)**.**

On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

► *Encore une fois, on cherche à obtenir un encadrement en utilisant des considérations géométriques sur les aires.*

Remarque On a déjà vu quelques équivalents remarquables à l'infini... On essaiera de retenir que certaines limites nous donnent aussi quelques équivalents en 0 très pratiques :

$$\begin{cases} \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \\ e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \end{cases} \quad \text{et ici, on a aussi : } \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

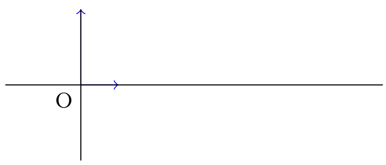
2.2 Etude des fonctions circulaires

Propriété 4 (étude de la fonction cos)**.**

La fonction cos est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$. De plus, elle est paire et 2π-périodique de sorte que sur $[0, \pi]$:

x	0		π
$\cos(x)$	1	$\searrow$	-1

et par 2π-périodicité et parité,



► *Après avoir restreint le domaine d'étude, on reviendra au taux d'accroissement pour justifier la dérivabilité.*

Remarque On essaiera de retenir quelques valeurs remarquables de la fonction cosinus :

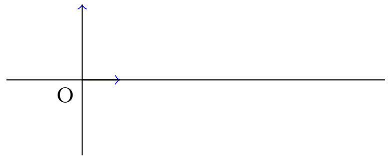
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Propriété 5 (étude de la fonction sin)**.**

La fonction sin est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$. De plus, elle est impaire et 2π-périodique de sorte que sur $[0, \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↗	1	↘ 0

et par 2π-périodicité et imparité,



▶ *Après avoir restreint le domaine d'étude, on reviendra au taux d'accroissement pour justifier la dérivabilité.*

Remarque On essaiera de retenir quelques valeurs remarquables de la fonction sinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Pour étudier une fonction trigonométrique, on appliquera le même plan d'étude que pour les autres fonctions usuelles. Néanmoins, on n'oubliera pas de commencer par réduire le domaine d'étude par périodicité et parité.

Exemple 1 Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$.

Propriété 6 (présentation et étude de la fonction tan)**.**

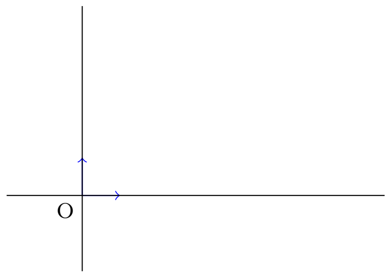
On note tan la **fonction tangente** définie par $\tan : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Alors, tan est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

De plus, elle est impaire et π-périodique de sorte que sur $[0, \frac{\pi}{2}[$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0 ↗	$+\infty$

et par π-périodicité et imparité,



▶ *Pour cette dernière fonction, cela revient à étudier le quotient de deux fonctions connues.*

Remarque On essaiera de retenir quelques valeurs remarquables de la fonction tangente :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Propriété 7 (formulaire trigonométrique)**.**

Sous réserve d'existence, on a aussi les formules suivantes :

(i) $\tan(-x) = -\tan(x)$, $\tan(x+\pi) = \tan(x)$...

(ii) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$, $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

(iii) $\tan(a) = \tan(b) \Leftrightarrow a = b\ [\pi]$

▶ *A partir des formules données, on revient aux propriétés des fonctions* cos *et* sin.

Exemple 2 Etudier la fonction *cotan* définie par $cotan(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Propriété 8 (formes indéterminées en 0).

On pourra alors retenir :

$$(i)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0 \qquad (ii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad (iv)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$$

Remarque Encore une fois, cette limite de référence pourra être notée autrement, et on retiendra cet **équivalent** usuel :

$$\tan(x)\underset{x\to 0}{\sim} x$$

2.3 Formules de changement de variable

Propriété 9 (les fonctions circulaires en fonction de la tangente du demi-angle).

Sous réserve d'existence et en posant $t=\tan(\frac{x}{2})$, on a :

$$(i)\quad \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad (ii)\quad \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2} \qquad (iii)\quad \tan(x)=\frac{2t}{1-t^2}$$

▶ *Il suffit d'exploiter les formules de transformations algébriques.*

Théorème 10 (paramétrisation du cercle trigonométrique).

Soient $x, y\in\mathbb{R}$, alors :

$$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow \text{il existe un unique } \theta\in[0,2\pi[\text{ tel que } x=\cos(\theta) \text{ et } y=\sin(\theta).$$

▶ *Ce résultat découle immédiatement de la définition des fonctions* cos *et* sin *comme abscisse et ordonnée des points du cercle.*

Cette dernière propriété nous permet en outre de transformer les résultats obtenus en physique : on parle de la **transformation de Fresnel**.

Exemple 3 Soient $\omega\in\mathbb{R}_+^*$, $A, B\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $(C,\phi)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)=C\cos(\omega t+\phi)$$

3 Les fonctions circulaires réciproques

3.1 La fonction arccos

Propriété 11 (existence de la fonction arccos).

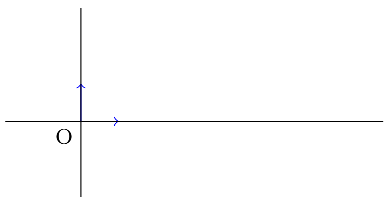
La fonction cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$ et admet ainsi une bijection réciproque notée arccos définie sur $[-1,1]$ telle que:

$$\begin{cases} y=\cos(x)\\ x\in[0,\pi]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\arccos(y)=x\\ y\in[-1,1]\end{cases}$$

De plus,

(i) arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x\in]-1,1[$, $\arccos'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(ii) $\arccos(-1)=\pi$, $\arccos(1)=0$ de sorte que :



▶ *On utilise encore les mêmes propriétés sur les bijections et leur fonction réciproque...*

Remarque On fera attention aux intervalles sur lesquels ces fonctions désignent des bijections réciproques, ainsi :

$$\forall\, x\in[-1,1],\ \cos\circ\arccos(x)=x \text{ et } \forall\, x\in[0,\pi],\ \arccos\circ\cos(x)=x$$

En fait, arccos **nous donne l'angle associé situé dans l'intervalle** $[0,\pi]$**.**

Propriété 12 (composées remarquables).

Pour tout $x \in [-1,1]$,

$$(i) \quad \cos\circ\arccos(x) = x \qquad (ii) \quad \sin\circ\arccos(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad (iii) \text{ et avec } x \neq 0,\ \ \tan\circ\arccos(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

▶ *Si la première égalité est évidente, les autres font intervenir les formules trigonométriques courantes.*

3.2 La fonction arcsin

Propriété 13 (existence de la fonction arcsin).

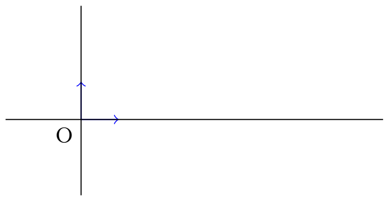
La fonction sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$ et admet ainsi une bijection réciproque notée arcsin définie sur $[-1,1]$ telle que:

$$\begin{cases} y = \sin(x) \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin(y) = x \\ y \in [-1,1] \end{cases}$$

De plus,

(i) arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(ii) $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ de sorte que :



▶ *On utilise encore les mêmes propriétés sur les bijections et leur fonction réciproque...*

Remarques

1. On fera attention aux intervalles sur lesquels ces fonctions désignent des bijections réciproques, ainsi :

$$\forall\, x \in [-1,1],\ \sin\circ\arcsin(x) = x \text{ et } \forall\, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \arcsin\circ\sin(x) = x$$

   En fait, arcsin **nous donne l'angle associé situé dans l'intervalle** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$**.**

2. On peut constater que la courbe représentative de la fonction arcsin est symétrique par rapport à l'origine. En effet, on peut montrer que si les domaines de départ et d'arrivée sont centrés en 0, la bijection réciproque d'une fonction impaire est encore impaire :

$$\forall\, y \in J,\ f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$$

Propriété 14 (composées remarquables).

Pour tout $x \in [-1,1]$,

$$(i) \quad \cos\circ\arcsin(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad (ii) \quad \sin\circ\arcsin(x) = x \qquad (iii) \text{ et avec } x \neq \pm 1,\ \ \tan\circ\arcsin(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Propriété 15 (relations fondamentales).

Pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

▶ *On montre que la fonction* $x \mapsto \arccos(x) + \arcsin(x)$ *est constante sur l'intervalle* $]-1,1[$.

3.3 La fonction arctan

Propriété 16 (existence de la fonction arctan).

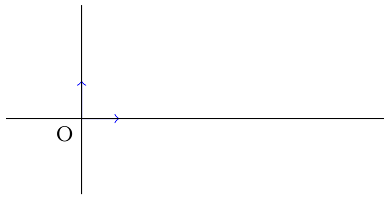
La fonction tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ et admet ainsi une bijection réciproque notée arctan définie sur $\mathbb{R}$ telle que:

$$\begin{cases} y = \tan(x) \\ x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arctan(y) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De plus,

(i) arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ de sorte que :



► *On utilise encore les mêmes propriétés sur les bijections et leur fonction réciproque...*

Remarques

1. On fera attention aux intervalles sur lesquels ces fonctions désignent des bijections réciproques, ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \tan\circ\arctan(x) = x \text{ et } \forall\, x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \arctan\circ\tan(x) = x$$

   En fait, arctan **nous donne l'angle associé situé dans l'intervalle** $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$**.**

2. La fonction arctan est aussi impaire, comme bijection réciproque de la fonction tan impaire sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ centré en 0.

Propriété 17 (composées remarquables).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(i)\quad \cos\circ\arctan(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (ii)\quad \sin\circ\arctan(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (iii)\quad \tan\circ\arctan(x) = x$$

Propriété 18 (relations fondamentales).

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

► *On montre que la fonction* $x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ *est constante sur* $\mathbb{R}_-^*$ *et sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 4 Etudier, puis représenter la fonction: $x \longmapsto \arctan(\sqrt{\dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}})$.