Chapitre 2

Etude d'une fonction d'une variable réelle et premières fonctions usuelles

Au cours du premier chapitre, nous avons mené nos premières études de fonctions pour démontrer des inégalités. Nous revenons ici sur le principe d'une telle étude, et nous redéfinirons les premières fonctions usuelles : les fonctions logarithmes, exponentielles et puissances, des fonctions pour lesquelles les propriétés algébriques seront nombreuses.

Pour aller plus loin

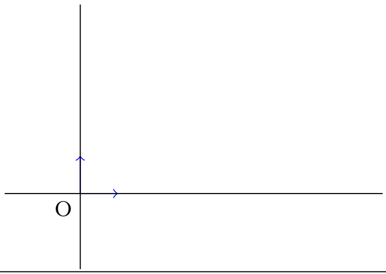
Si ce chapitre peut d'abord être vu comme des rappels, il reste incontournable car il sera important, plus tard, d'être capable d'étudier des fonctions avec des paramètres donnés. Il y a en effet de nombreux théorèmes de deuxième année pour les suites ou séries de fonctions, ainsi que pour les intégrales à paramètre qui exigent des dominations assez fines.

1 Etude des fonctions d'une variable réelle

1.1 Plan d'étude d'une telle fonction : rappels et compléments

Définition On note encore $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. On appelle **fonction d'une variable réelle** tout mécanisme f qui à tout nombre réel x associe au plus une **image** notée $f(x)$.
L'ensemble $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \text{ existe}\}$ représente l'**ensemble de définition** de la fonction f, et si $y = f(x)$, on dit aussi que x désigne un **antécédent** de y.

De plus, si on se place dans le plan usuel muni d'un repère, alors on peut représenter l'ensemble des points $M(x, f(x))$: ils constituent la **courbe représentative** de la fonction f notée C_f et qui a pour **équation** $y = f(x)$.



Remarque Généralement, on adoptera le **plan d'étude** défini par les points ① à ⑤.

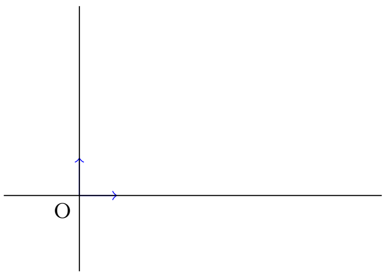
① Etude de la parité et restriction du domaine d'étude

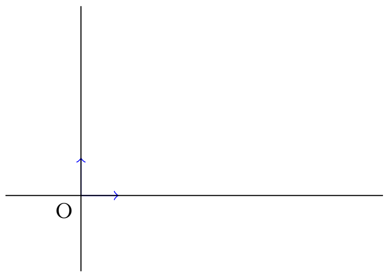
Définition Soit f une fonction définie sur D inclus dans $\mathbb{R}$. On dit que f est :

- une **fonction paire** si $\begin{cases} D \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \forall\, x \in D,\ f(-x) = f(x) \end{cases}$.
- une **fonction impaire** si $\begin{cases} D \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \forall\, x \in D,\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

Exemple 1 Etudier la parité de la fonction $f : x \longmapsto \ln(\dfrac{x-1}{x+1})$.

Représentation On peut observer que la représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy). De la même façon, la représentation graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à O, l'origine du repère.





Ainsi, pour étudier de telles fonctions, il suffira de se restreindre au domaine $D \cap [0, +\infty[$, puis de compléter la courbe par une simple symétrie.

② Etude de la monotonie

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **croissante** sur I si pour tous $x, y \in I$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- On dit que f est **décroissante** sur I si pour tous $x, y \in I$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- On dit que f est **monotone** sur I si f est croissante ou décroissante sur I.

Remarques

1. Si les inégalités sont strictes, on précisera notre propos en disant que f est **strictement monotone**.
2. De plus, on rappelle que la monotonie dépend du signe de la dérivée. Plus précisément :

Théorème 1 (caractérisation de la monotonie par le signe de la dérivée)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I qu'on suppose dérivable sur I. Alors, on montrera que :

(i) f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

(ii) f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

(iii) f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Remarque Pour aller chercher le signe de la dérivée, on appliquera les formules de dérivation et on essaiera de se ramener à un produit ou quotient de termes dont le signe est facile à déterminer.

Propriété 2 (opérations sur les fonctions dérivables)**.**

Soient f, g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors, on rappelle que :

(i) la somme $f + g$ est encore dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(ii) le produit fg est encore dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(iii) sous réserve d'existence, le quotient $\dfrac{1}{g}$ est encore dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(\dfrac{1}{g})'(x) = \dfrac{-g'(x)}{(g(x))^2}$.

(iv) sous réserve d'existence, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est encore dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(\dfrac{f}{g})'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Propriété 3 (dérivabilité d'une fonction composée).

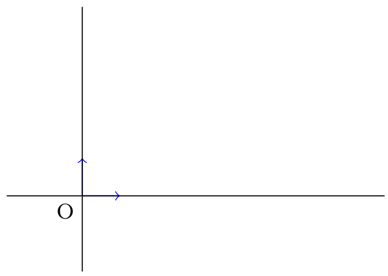
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J, telles que $f(I) \subset J$.
Alors, on admet que la fonction $g \circ f$ est encore dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Remarque Cette dernière propriété est fort pratique, car elle nous donnera un moyen facile pour retrouver les dérivées des fonctions composées usuelles...

③ Limites aux bornes du domaine de définition

Définition Soient f une fonction définie sur D inclus dans $\mathbb{R}$ et notons $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a si pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage autour de a pour lequel $f(x) \in V$:



Cette limite sera notée : $\lim\limits_{a} f = b$ ou encore $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Remarques

1. Dans le cas où on ne s'intéresse qu'à la limite de $f(x)$ quand $x \to a$, $x < a$ ou quand $x \to a$, $x > a$, on parle de **limite à gauche** ou de **limite à droite**.

2. Pour aller chercher la limite d'une fonction aux bornes du domaine de définition, on utilise généralement les opérations sur les limites :

Propriété 4 (opérations sur les limites).

Pour calculer la limite d'une fonction, on sera souvent amené à utiliser ces règles de calcul qu'on démontrera dans un prochain chapitre, et dont on retiendra les **formes indéterminées** :

(i) soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$,

si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

(ii) soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$,

si f a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
alors fg a pour limite	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

(iii) soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, $\ell' \neq 0$,

si f a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'<0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Et dans le cas particulier où ℓ' est nul,

si f a pour limite	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0
si g a pour limite	$0+$	$0-$	$0+$	$0-$	0
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple 2 Calculer la limite quand $x \to +\infty$ des fonctions suivantes : $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - \frac{1}{x}}{1-x^4}$, $g : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{x}}{2-\sqrt{4-\frac{1}{x}}}$ et $h : x \mapsto \ln(1+x^2) - x$.

Remarques

1. On retiendra que pour lever l'indétermination, on peut éventuellement transformer l'expression algébrique donnée : développement, factorisation, multiplication par la quantité conjuguée...

2. On pourra aussi, dans certains cas, abuser de la notation et utiliser le symbole $\sim$ qui donne pour les produits et quotients un moyen rapide d'**identifier les éléments dominants** au voisinage de l'infini.
On fera attention malgré tout aux équivalents proposés car par définition, on a :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \text{si le rapport } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ tend vers 1 quand } x \to a.$$

④ Etude de la continuité et de la dérivabilité en des points particuliers

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. On rappelle que f est **continue** sur I si en tout point $a \in I$, la limite de $f(x)$ existe et vérifie :

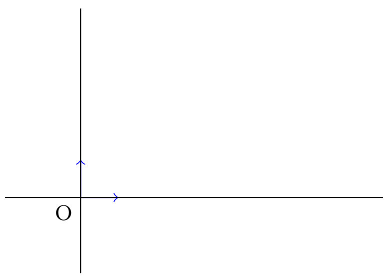
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

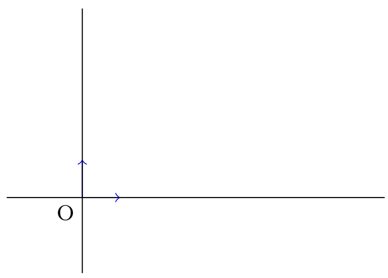
On dit aussi que f est de **classe** C^0 sur I.

Remarques

1. Graphiquement, une fonction continue est représentée par un tracé continu.

2. Bien entendu, si on ne s'intéresse qu'à la limite à gauche ou à droite, on précisera que f est **continue à gauche ou à droite** en a. Par exemple :





Propriété 5 (caractérisation de la continuité en un point)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Alors, on admet que f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite de a. Et dans ce cas,

$$\lim_{x \to a, x < a} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a, x > a} f(x)$$

La plupart du temps, les fonctions données sont continues comme composées de fonctions continues sur leur domaine de définition : c'est le cas des fonctions polynômes et rationnelles. Par contre, si elles ne sont pas définies en un point, on pourra les **prolonger par continuité** en imposant la valeur manquante. On fera donc attention à bien distinguer la **continuité** et le **prolongement par continuité**.

Exemple 3 Les questions sont indépendantes.

1. On définit la fonction f par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}, \text{ si } x \geq -1, x \neq 0 \\ 2, \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Justifier que f est continue sur $[-1, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ peut être prolongée par continuité en 0.

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. On rappelle que f est **dérivable** sur I si en tout point $a \in I$, le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a.
Dans ce cas, cette limite sera appelée **nombre dérivé** de f en a et elle sera notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$. La fonction $f' : x \in I \longmapsto f'(x)$ désigne alors la **dérivée** de la fonction f.

Propriété 6 (caractérisation de la dérivabilité en un point)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Alors, on admet que f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de a avec :

$$\lim_{x \to a, x < a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a, x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La plupart du temps, les fonctions données sont dérivables comme composées de fonctions dérivables sur leur domaine de définition : c'est le cas des fonctions polynômes et rationnelles qui sont même indéfiniment dérivables, on dit aussi qu'elles sont de classe C^∞.

Exemple 4 Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto |x|$ en 0.

Remarque On peut en fait montrer que la dérivabilité en un point entraîne la continuité en ce point, en effet si f est dérivable et en notant τ_a le taux d'accroissement, alors :

$$f(x) = f(a) + (x-a)\tau_a(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a) + 0.f'(a) = f(a)$$

On retiendra néanmoins que la réciproque est fausse.

5 Etude des branches infinies et représentation

Définition On se place dans le plan usuel muni d'un repère de centre O. On note f une fonction définie sur D inclus dans $\mathbb{R}$ et $M(x, f(x))$ un point courant appartenant à C_f.
Dans le cas particulier où la distance OM tend vers l'infini, on dit que la courbe C_f associée présente une **branche infinie**.

Propriété 7 (étude des branches infinies)**.**

Soient $a, b, m, p \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, alors C_f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.

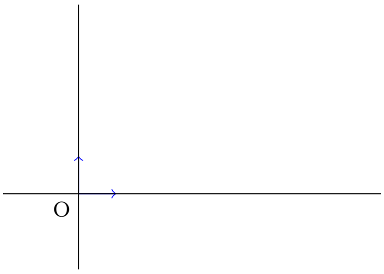
(ii) Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, alors C_f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = b$.

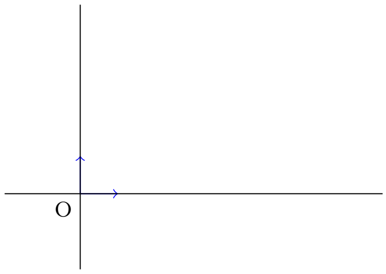
(iii) Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on étudie la limite du rapport $\frac{f(x)}{x}$:

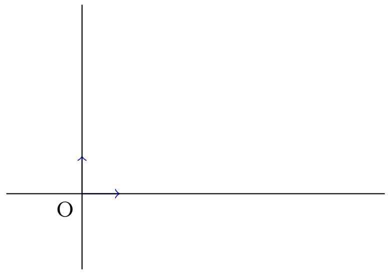
- si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors C_f admet une **branche parabolique** de direction (Oy) ;
- si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f une **branche parabolique** de direction (Ox) ;

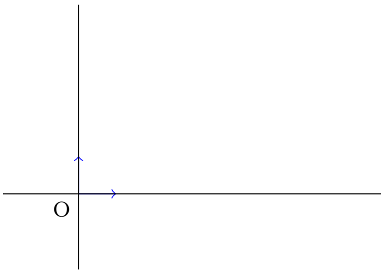
- et dans les autres cas, si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$, on étudie la limite de la différence $f(x) - mx$ de sorte que :

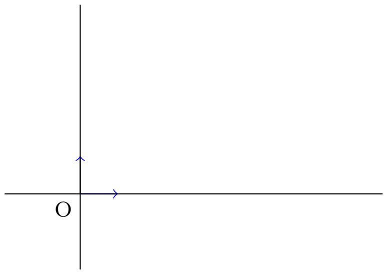
$$\begin{cases} \text{si } \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = \pm\infty, \text{ alors } C_f \text{ admet une \textbf{branche parabolique} de direction la droite d'équation } y = mx; \\ \text{si } \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = p, \text{ alors } C_f \text{ admet une \textbf{asymptote oblique} d'équation } y = mx + p. \end{cases}$$

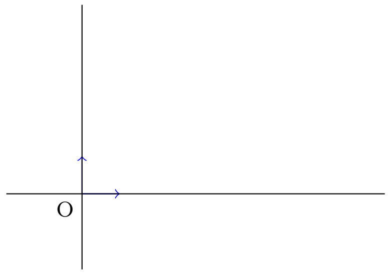












Exemple 5 Etudier, puis représenter la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$. On précisera les points particuliers ainsi que les branches infinies.

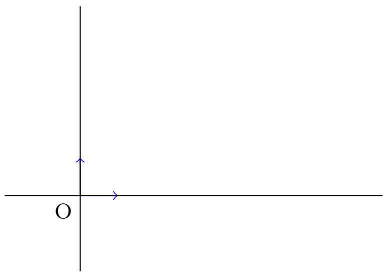
1.2 Théorème de la bijection et bijection réciproque

Théorème 8 (de la bijection)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I qu'on suppose continue et strictement monotone sur I. Alors, $J = f(I)$ est encore un intervalle, et f réalise une **bijection** de I sur J. C'est à dire que :

$$\forall\, y \in J,\ \exists!\, x \in I,\ y = f(x)$$

Représentation Les hypothèses de continuité et de stricte monotonie sont des conditions suffisantes pour obtenir une telle bijection: l'une permettant d'assurer l'existence d'un antécédent, l'autre donnant l'unicité de celui-ci.



En particulier, on retiendra qu'on peut restreindre l'intervalle de départ pour rendre notre application bijective.

Exemple 6 Montrer qu'il existe une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$ à l'équation $x\ln(x) - 1 = 0$.

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I qu'on suppose bijective de I sur $J = f(I)$.
On appelle alors **bijection réciproque** la fonction notée f^{-1} qui à tout $y \in J$ associe son unique antécédent $x \in I$ par f, de sorte que :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{cases}$$

Propriété 9 (de la bijection réciproque).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I qu'on suppose continue et strictement monotone sur I. Alors, on montrera que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$, et sa bijection réciproque vérifie :

(i) pour tout $(x, y) \in I \times J$, $f^{-1} \circ f(x) = x$ et $f \circ f^{-1}(y) = y$.

(ii) dans un repère orthonormé, les courbes représentatives C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

(iii) f^{-1} est elle-même continue sur J, strictement monotone sur J et de même sens de variations que f.

Théorème 10 (cas particulier de la dérivabilité).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I qu'on suppose dérivable et strictement monotone sur I, et telle que sa dérivée ne s'annule pas sur I. Alors, on admet que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$, et que sa bijection réciproque est dérivable sur J de sorte que :

$$\forall\, y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Exemple 7 On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Etudier et représenter f.
2. En déduire qu'il existe une unique fonction g telle que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g \circ f(x) = x$.
3. g désigne en fait la fonction racine carrée. Retrouver alors ses différentes caractéristiques.

Remarques Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$.

1. On rappelle que par convention $f_0 = 1 \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},\ x^0 = 1$.
2. Si on étudie la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ sur un domaine I bien choisi, on montre qu'elle réalise une bijection et on peut ainsi définir la **racine n-ième d'un nombre réel** ($n \in \mathbb{N}^*$) en posant: $f_n^{-1} : x \in J \mapsto x^{\frac{1}{n}}$.

2 Les fonctions logarithmes

2.1 La fonction logarithme népérien

Définition On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction ln définie comme l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. C'est à dire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \text{ , ou plus simplement, } \begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \ln(1) = 0 \end{cases}.$$

Propriété 11 (propriétés algébriques).

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, on a :

(i) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

(ii) $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$, et donc $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

(iii) Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\ln(a^r) = r\ln(a)$.

► *On commence par démontrer la première égalité en étudiant une fonction d'une seule variable, puis on utilise celle-ci pour aller chercher les autres propriétés.*

Remarque Dans le reste du cours, on admettra que ce résultat peut être étendu aux nombres réels :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ln(a^x) = x\ln(a)$$

Propriété 12 (limites de référence).

On a :

$$(i)\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad (ii)\ \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \quad (iii)\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad (iv)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

▶ *Pour la première limite, on admet l'existence de cette limite dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *avant de montrer que* $\ell = +\infty$ *; les autres s'obtiennent astucieusement que ce soit en utilisant un changement de variable, ou en reconnaissant un taux d'accroissement.*

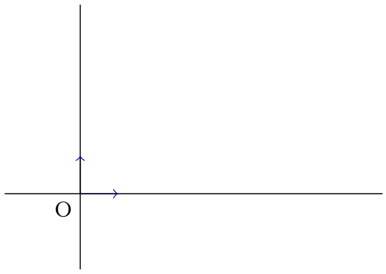
Théorème 13 (monotonie et comportement asymptotique)**.**

(i) La fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$: elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Dans un repère orthonormé, sa courbe représentative admet deux branches infinies : une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une branche parabolique de direction (Ox).

▶ *Seul le dernier point semble délicat; pour cela, il nous suffit d'étudier la fonction* $x \mapsto \ln(x) - 2(\sqrt{x} - 1)$ *avant de passer à la limite dans une inégalité bien choisie...*

Représentation On obtient la représentation graphique de la fonction ln :



En particulier, on pourra retenir le signe de cette fonction : elle est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.

Dans une preuve précédente, nous avons vu comment démontrer une propriété algébrique en faisant intervenir une fonction d'une seule variable. Nous allons procéder de la même façon pour résoudre une première **équation fonctionnelle**.

Exemple 8 Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

2.2 La fonction logarithme de base quelconque $\log_a$

Définition Soit $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
On appelle **fonction logarithme de base** a la fonction notée $\log_a$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x)$$

3 Les fonctions exponentielles

3.1 La fonction exponentielle népérienne

Définition On rappelle que la fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On appelle alors **fonction exponentielle népérienne** sa bijection réciproque notée exp telle que :

$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exp(y) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Corollaire 14 (monotonie et comportement asymptotique)**.**

On en déduit immédiatement :

(i) $\exp(0) = 1$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln \circ \exp(x) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp \circ \ln(x) = x$.

(ii) La fonction exp est également continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

▶ *Il suffit de faire appel aux différentes propriétés de la bijection réciproque...*

Propriété 15 (propriétés algébriques).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

(i) $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

(ii) $\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$, et donc $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

(iii) Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\exp(ra) = (\exp(a))^r$.

▶ *On commence par prouver la première égalité en faisant intervenir les propriétés de sa bijection réciproque* ln*, puis on utilise celle-ci pour aller chercher les autres propriétés.*

Remarque La dernière assertion nous donne en particulier : $\forall\, r \in \mathbb{Q},\ \exp(r) = \exp(r.1) = (\exp(1))^r$.
Ainsi, en posant $e = \exp(1)$, on est ramené à écrire : $\exp(r) = e^r$. Dans le reste du cours, on choisira d'étendre cette notation puissance aux nombres réels et ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = e^x$$

Propriété 16 (limites de référence).

On a :

$$(i)\quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad (ii)\quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad (iii)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

▶ *Les deux premières limites sont obtenues par définition de la fonction exponentielle comme bijection réciproque du logarithme, et dans la dernière, on reconnaîtra aisément un taux d'accroissement.*

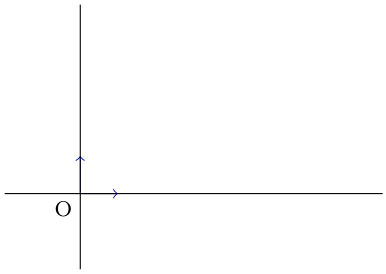
Théorème 17 (monotonie et comportement asymptotique).

(i) La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) Dans un repère orthonormé, sa courbe représentative admet deux branches infinies: une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et une branche parabolique de direction (Oy).

▶ *Une fois encore, tout découle des propriétés de la bijection réciproque, dont le tracé s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice.*

Représentation On obtient la représentation graphique de la fonction exp :



En particulier, on pourra retenir le signe de cette fonction : elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

En physique, de nombreux systèmes se ramènent à la résolution d'une **équation différentielle**, c'est à dire une équation reliant une fonction et certaines de ses dérivées. Par exemple, on considère l'équation différentielle du premier ordre :

$$y' = ay \text{ , avec } a \in \mathbb{R}$$

Exemple 9 Fixons $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = af(t)$$

3.2 La fonction exponentielle de base quelconque $\exp_a$

Définition Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.
On appelle **fonction exponentielle de base** a la fonction notée $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\exp_a(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$$

Propriété 18 (bijections réciproques)**.**

Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Les fonctions $\log_a$ et $\exp_a$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

► *On peut procéder de différentes façons : soit en partant d'une égalité de la forme* $y = \log_a(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, *soit en explicitant les fonctions composées* $\log_a \circ \exp_a$ *et* $\exp_a \circ \log_a$*...*

4 Les fonctions puissances

4.1 Définition et règles de calcul usuel

Définition Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance d'exposant réel** α la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

Remarque Il s'agit en fait de prolonger naturellement la notation **puissance d'un nombre entier** définie par :

$$x^p = \begin{cases} x \times x \times \ldots \times x, \text{ si } p > 0 \\ \dfrac{1}{x^{-p}}, \text{ si } p < 0 \end{cases} \qquad \text{avec la convention } x^0 = 1$$

Propriété 19 (règles de calcul)**.**

On a pour tous $x, y > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(i)\ \ x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad (ii)\ \ (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \quad (iii)\ \ (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad (iv)\ \ \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$$

► *Il suffit encore une fois de se ramener à la première définition et d'utiliser les propriétés algébriques de la fonction* exp.

Plus généralement, on peut remarquer que si une fonction nous est donnée sous la forme $u(x)^{v(x)}$, on veillera à chaque fois à se ramener à une écriture exponentielle pour en simplifier l'étude.

Exemple 10 Etudier, puis représenter la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.

4.2 Croissances comparées

Propriété 20 (croissances comparées)**.**

Pour lever certaine indétermination, il est très pratique de connaître le comportement asymptotique des fonctions usuelles les unes par rapport aux autres. On parle de **croissances comparées** :
Pour tous $\alpha, \beta > 0$,

$$(i)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad (ii)\ \lim_{x\to 0} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0 \quad (iii)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty \quad (iv)\ \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta (e^x)^\alpha = 0$$

► *On utilise les limites usuelles du logarithme et de la fonction exponentielle pour aller chercher les autres limites par changement de variable ou transformation algébrique.*

5 Les fonctions hyperboliques et leurs réciproques

5.1 Etude des fonctions hyperboliques et premières propriétés

On introduit ici les fonctions hyperboliques comme les parties paire et impaire de la fonction exponentielle, ce qui nous permettra de revoir le **raisonnement par analyse-synthèse**.

Exemple 11 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Montrer qu'il existe de façon unique une fonction g paire et une fonction h impaire définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$$

Définition

- On appelle alors **fonction cosinus hyperbolique** et **fonction sinus hyperbolique** les parties paire et impaire de la fonction exponentielle définies par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R},\ sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- De plus, on définit la **fonction tangente hyperbolique** sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$.

Remarque En particulier, ch est paire, sh est impaire et elles vérifient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

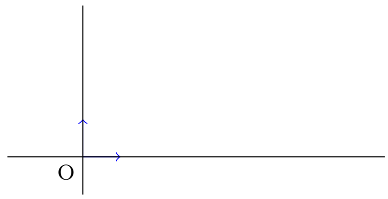
$$e^x = ch(x) + sh(x) \text{ et } e^{-x} = ch(x) - sh(x)$$

Propriété 21 (étude de la fonction ch).

La fonction ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ch'(x) = sh(x)$. On en déduit ses variations :

x	0	$+\infty$
$ch(x)$	1 $\nearrow$	$+\infty$

et donc par parité,



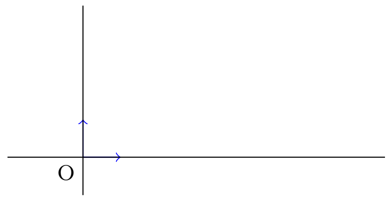
► *Il s'agit d'une simple étude de fonction exponentielle qu'on mènera avec soin : domaine de définition, parité...*

Propriété 22 (étude de la fonction sh).

La fonction sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $sh'(x) = ch(x)$. On en déduit ses variations :

x	0	$+\infty$
$sh(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

et donc par imparité,

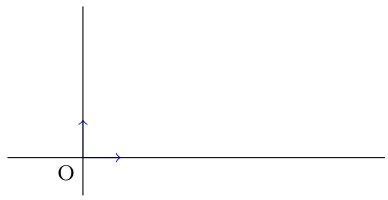


Propriété 23 (étude de la fonction th).

La fonction th est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $th'(x) = \frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)$. On en déduit ses variations :

x	0	$+\infty$
$th(x)$	0 $\nearrow$	1

et donc par imparité,



Propriété 24 (formulaire hyperbolique).

Soient $x, a, b \in \mathbb{R}$. Alors on a :

(i) $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

(ii) $ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$, $ch(a-b) = ch(a)ch(b) - sh(a)sh(b)$,
$sh(a+b) = sh(a)ch(b) + sh(b)ch(a)$, $sh(a-b) = sh(a)ch(b) - sh(b)ch(a)$

(iii) En particulier, $ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x) = 2ch^2(x) - 1 = 1 + 2sh^2(x)$, $sh(2x) = 2ch(x)sh(x)$

► *Il suffit de se ramener à la définition des fonctions ch et sh.*

5.2 Expressions de leurs réciproques

Propriété 25 (existence de la fonction *argch*).

La fonction *ch* réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$ et admet ainsi une bijection réciproque notée *argch* définie sur $[1,+\infty[$ telle que:

$$\begin{cases} y = ch(x) \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} argch(y) = x \\ y \in [1,+\infty[\end{cases}$$

De plus,

(i) *argch* est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$, $argch'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

(ii) on a pour tout $x \in [1,+\infty[$, $argch(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

► *On utilise les propriétés établies précédemment sur les bijections et leur réciproque. Pour le dernier point, on pourra encore procéder de deux façons : soit en vérifiant l'expression donnée, soit en partant de $y = ch(x)$ afin d'exprimer x en fonction de y.*

Propriété 26 (existence de la fonction *argsh*).

La fonction *sh* réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et admet ainsi une bijection réciproque notée *argsh* définie sur $\mathbb{R}$ telle que:

$$\begin{cases} y = sh(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} argsh(y) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De plus,

(i) *argsh* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $argsh'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(ii) on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $argsh(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

Propriété 27 (existence de la fonction *argth*).

La fonction *th* réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et admet ainsi une bijection réciproque notée *argth* définie sur $]-1,1[$ telle que:

$$\begin{cases} y = th(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} argth(y) = x \\ y \in]-1,1[\end{cases}$$

De plus,

(i) *argth* est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $argth'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

(ii) on a pour tout $x \in]-1,1[$, $argth(x) = \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$.