Chapitre 1

Présentation des ensembles fondamentaux et premières propriétés algébriques

Dans ce premier chapitre, nous introduisons les premières notations qui seront utilisées et présentons rapidement les ensembles fondamentaux. L'étude de ces ensembles sera très utile que ce soit en algèbre avec les premières formules remarquables, ou en analyse avec une notion délicate : l'existence d'une borne supérieure ou inférieure d'un ensemble donné.

Pour aller plus loin

Ce premier chapitre nous montrera qu'il est très pratique de travailler dans $\mathbb{R}$: c'est le corps totalement ordonné de base dans lequel on peut aisément travailler par encadrement, résoudre des équations produits, transformer des sommes ou des produits grâce aux propriétés algébriques de ses lois de composition interne. D'ailleurs, ce sont les axiomes de $\mathbb{R}$ qui nous donneront le théorème de convergence monotone pour les suites réelles.

Bien entendu, celui-ci est parfois insuffisant et nous verrons plus tard comment on peut se plonger dans $\mathbb{C}$ pour résoudre d'autres problèmes algébriques : factorisation des polynômes, transformations d'expressions trigonométriques...

1 Rudiments de la théorie des ensembles

1.1 Principaux raisonnements et notion de contre-exemple

Définition

- On appelle **axiome** toute assertion qu'on suppose établie. Par contre, on appelle **conjecture** tout énoncé ou hypothèse qu'on cherchera à démontrer.
- On appelle **lemme**, **propriété**, **théorème** ou **corollaire** des énoncés pour lesquels une démonstration peut être rédigée.

Généralement, les démonstrations mises en place s'articuleront autour de raisonnements très classiques. On distingue :

- le **raisonnement par implication** : il s'agit du raisonnement le plus courant et pour montrer que $A \Rightarrow B$, on suppose que A est vraie et on cherche à obtenir B.
- le **raisonnement par équivalence** : pour montrer que $A \Leftrightarrow B$, on enchaîne les propriétés équivalentes. En cas de doute, on préfèrera procéder par double implication en montrant le sens direct $A \Rightarrow B$ et sa réciproque $B \Rightarrow A$.
- le **raisonnement par contraposition** : pour montrer que $A \Rightarrow B$, on montre en fait que *non* $B \Rightarrow$ *non* A.
- le **raisonnement par disjonction de cas** : pour établir une propriété A, on discute tous les cas qui conduisent à A.
- le **raisonnement par l'absurde** : pour établir une propriété A, on suppose que *non* A est vraie et on cherche à obtenir une contradiction.
- le **raisonnement par analyse-synthèse** : pour établir l'existence d'une solution à un problème donné, on analyse sa forme sous réserve d'existence, puis on vérifie que la forme obtenue convient avant de conclure.

Exemple 1

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que si α est racine de $P(x) = x^3 + x$, alors $\alpha = 0$.
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n(n+1)$ est pair.
3. On note $P(x) = x^2 - ax - a,\ a \in \mathbb{R}$. Etablir que : $-4 < a < 0\ \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \neq 0$.
4. On considère une suite réelle (u_n) qu'on suppose convergente. Montrer que sa limite est unique.

Remarques

1. Pour chacun de ces raisonnements, il faudra être vigilant dans l'interprétation des **quantificateurs** et on devra être capable de nier certaines propositions :

assertion	assertion en langage mathématique	négation en langage mathématique
P ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$		
f est nulle sur l'intervalle I		
x appartient à l'intervalle $[2,5]$		
	$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in I,\ f(x) \leq M$	
	$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 0$	

   On retiendra en particulier comment **nier une implication** de la forme $A \Rightarrow B$. Cela revient à : A et *non* B.

2. Par contre, pour démontrer qu'une propriété n'est pas vraie, il suffit en fait de proposer un **contre-exemple** qui contredit l'assertion donnée :

Exemple 2 Montrer qu'une fonction polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle. La réciproque est-elle vraie ?

Définition

- Dans le cas particulier d'un résultat sous la forme $A \Rightarrow B$, on dit aussi que B est une **condition nécessaire** pour A, ou que A est une **condition suffisante** pour que B soit réalisée.
- Dans le cas particulier d'un résultat sous la forme $A \Leftrightarrow B$, on dit aussi que B est une **condition nécessaire et suffisante** pour A et on obtient ainsi une **caractérisation** de A.

1.2 Ensembles et opérations

Définition

- On appelle **ensemble** E toute collection d'objets mathématiques. Si F désigne un autre ensemble, alors F est **inclus dans** E si tous les éléments de F sont dans E. En particulier,
$$E = F \Leftrightarrow E \subset F \text{ et } F \subset E$$
- L'ensemble de tous les sous-ensembles de E est appelé **ensemble des parties** de E et il sera noté $\mathcal{P}(E)$. Ainsi, considérer un sous-ensemble A de E, c'est considérer une partie A telle que :
$$A \subset E \text{ ou bien } A \in \mathcal{P}(E)$$

En notant A, B des sous-ensembles de E, on définit alors les opérations suivantes :

* $E\backslash A$ ou $\overline{A}$ ou A^c, le **complémentaire** de A représentant l'ensemble des éléments $x \in E$ qui ne sont pas dans A.
* $A \cap B$, l'**intersection** de A et B représentant l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à la fois à A et à B.
* $A \cup B$, la **réunion** de A et B représentant l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à A ou à B.

Remarques

1. L'ensemble vide noté $\emptyset$ et E sont deux sous-ensembles particuliers de E, et ils représentent donc des éléments de $\mathcal{P}(E)$.
2. Dans le cas particulier où A et B sont **disjoints**, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, alors la réunion disjointe sera notée $A \sqcup B$.
3. Enfin, on pourra aussi considérer des réunions ou intersections finies d'ensembles de sorte que :
   - $\cap_{i=1}^n A_i$ désigne une **intersection finie** d'ensembles telle que :
   $$x \in \cap_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ x \in A_i$$
   - $\cup_{i=1}^n A_i$ désigne une **réunion finie** d'ensembles telle que :
   $$x \in \cup_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow \exists\, i_0 \in [\![1, n]\!],\ x \in A_{i_0}$$

Propriété 1 (distributivité et lois de Morgan)**.**

Soient E un ensemble quelconque et $A, B, C \in P(E)$. Alors,

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (iii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

► *Il suffit simplement de revenir à une représentation ensembliste pour s'en convaincre.*

1.3 Maximum et minimum d'une partie donnée

Définition On considère un ensemble quelconque E muni d'une **relation d'ordre total** $\geq$ et A un sous-ensemble non vide de E. On dit alors que :

- A est **majorée** s'il existe $M \in E$ tel que pour tout $x \in A$, $x \leq M$. Dans ce cas, M désigne un **majorant** de A.
- A est **minorée** s'il existe $m \in E$ tel que pour tout $x \in A$, $x \geq m$. Dans ce cas, m désigne un **minorant** de A.
- A est **bornée** si A est à la fois majorée et minorée.

De la même façon, on pourra dire que :

- M représente le **maximum de** A si :
$$\begin{cases} \forall\, x \in A,\ x \leq M \text{ , c'est à dire } M \text{ est un majorant de } A \\ M \in A \end{cases} \text{, et on notera } M = \max(A).$$
- m représente le **minimum de** A si :
$$\begin{cases} \forall\, x \in A,\ x \geq m \text{ , c'est à dire } m \text{ est un minorant de } A \\ m \in A \end{cases} \text{, et on notera } m = \min(A).$$

Remarques

1. On peut aussi parler de **plus grand** ou **plus petit élément** à la place de maximum ou minimum d'une partie donnée.
2. Attention, un ensemble donné ne possède pas forcément de plus grand ou plus petit élément. Par contre, si ceux-ci existent, on peut facilement montrer que le maximum et le minimum d'un tel ensemble sont uniques.

2 Présentation des ensembles fondamentaux

2.1 L'ensemble des entiers naturels

Définition On appelle **ensemble des entiers naturels** l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ muni de la **relation d'ordre total** $\geq$ et qui vérifie les **axiomes** suivants :

(1) toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un minimum, appelé aussi **plus petit élément**.

(2) toute partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée admet un maximum, appelé aussi **plus grand élément**.

(3) $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

Remarques

1. Dans $\mathbb{N}$, l'addition sera évidemment notée $+$ et la multiplication usuelle sera notée $\times$ ou encore . par commodité. Par contre, on pourra dans certains cas considérer le produit comme une somme itérée du même terme : $\forall\ (n,a) \in \mathbb{N}^2,\ n.a = a + a + \ldots + a$ (n-fois).

2. On peut donner du sens à l'inégalité stricte dans $\mathbb{N}$:
$$\forall\ (a,b) \in \mathbb{N}^2,\ a > b \Leftrightarrow a \geq b+1$$

3. Pour finir, on admet que les axiomes de $\mathbb{N}$ nous permettent d'obtenir le **principe de récurrence** et son corollaire :

Théorème 2 (principe de récurrence)**.**

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n.
S'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\begin{cases} P(n_0) \text{ est vraie (initialisation)} \\ \forall\ n \geq n_0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \text{ (hérédité)} \end{cases}$$
alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Remarque Ce principe de récurrence sera très pratique, notamment lorsqu'on étudiera des suites satisfaisant une relation de récurrence à un pas, c'est à dire les suites dont le terme au rang n ne dépend que du terme situé au rang précédent.

Exemple 3 On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \dfrac{1}{x}$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur $\mathbb{R}^*$ et on définit la notation **factorielle** par :
$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ n! = \begin{cases} 1, \text{ si } n = 0 \\ 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n, \text{ sinon} \end{cases}$$
Fixons $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Corollaire 3 (principe de récurrence forte)**.**

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n.
S'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que:
$$\begin{cases} P(n_0) \text{ est vraie (initialisation)} \\ \forall\ n \geq n_0,\ (P(n_0), P(n_0+1)\ldots P(n)) \Rightarrow P(n+1) \text{ (hérédité)} \end{cases}$$
alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Remarque C'est ce dernier principe qui nous permettra de démontrer des propriétés concernant des suites récurrentes à pas multiples, c'est à dire les suites dont le terme au rang n dépend de termes situés aux rangs précédents. Par contre, on sera vigilant dans la vérification des conditions initiales et on vérifiera le même nombre de conditions initiales que pour la définition de la suite.

Exemple 4 On considère la suite de Fibonacci définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$
Calculer les premiers termes de la suite, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$.

2.2 L'ensemble des entiers relatifs et celui des nombres rationnels

Définition On appelle **ensemble des entiers relatifs** l'ensemble noté $\mathbb{Z}$ composé des entiers naturels et de leur opposé, c'est à dire:
$$\mathbb{Z} = \{n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{-n, n \in \mathbb{N}\}$$

Propriété 4 (structure algébrique).

Dans $\mathbb{Z}$, on note $+$ et $\times$ les lois d'addition et de multiplication usuelles. Alors, muni de ces deux lois, on admet que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un **anneau commutatif**, c'est à dire :

- $(\mathbb{Z}, +)$ est un **groupe commutatif** : $\begin{cases} \text{la loi } + \text{ est une loi de composition interne : } \forall\,(a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ a+b \in \mathbb{Z} \\ \text{la loi } + \text{ est associative : } \forall\,(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3,\ a+(b+c) = (a+b)+c \\ \text{la loi } + \text{ possède un élément neutre, } 0 : \forall\, a \in \mathbb{Z},\ a+0 = 0+a = a \\ \text{tout élément appartenant à } \mathbb{Z} \text{ possède un symétrique pour la loi } +, \text{ appelé opposé :} \\ \qquad \forall\, a \in \mathbb{Z},\ \exists\, b \in \mathbb{Z},\ a+b = b+a = 0 \\ \text{la loi } + \text{ est commutative : } \forall\,(a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ a+b = b+a \end{cases}$

- la loi $\times$ vérifie les conditions : $\begin{cases} \text{la loi } \times \text{ est une loi de composition interne : } \forall\,(a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ a \times b \in \mathbb{Z} \\ \text{la loi } \times \text{ est associative : } \forall\,(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3,\ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \\ \text{la loi } \times \text{ possède un élément neutre, } 1 : \forall\, a \in \mathbb{Z},\ a \times 1 = 1 \times a = a \\ \text{la loi } \times \text{ est commutative : } \forall\,(a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ a \times b = b \times a \end{cases}$

- la loi $\times$ est distributive par rapport à l'addition : $\forall\,(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3,\ a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ et $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

Remarque Attention, dans un anneau commutatif, tous les éléments n'ont pas forcément de symétrique ou d'inverse, pour la loi $\times$. Par exemple, tous les éléments non nuls de $\mathbb{Z}$ ne sont pas forcément inversibles dans $\mathbb{Z}$, à l'exception de ± 1. Ces éléments seront notés $U(\mathbb{Z})$ de sorte que :

$$U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$$

Propriété 5 (existence du plus grand ou plus petit élément).

Dans $\mathbb{Z}$, on note encore $\geq$ la relation d'ordre usuelle. Alors, elle permet à $\mathbb{Z}$ de vérifier :

(1) toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et minorée admet un plus petit élément ;

(2) toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée admet un plus grand élément.

► *Partant d'une partie A incluse dans $\mathbb{Z}$, on pose $A = A_- \cup A_+$, puis selon les cas, on se ramène dans $\mathbb{N}$.*

Remarque On peut aussi montrer à partir des axiomes de $\mathbb{N}$ que $\mathbb{Z}$ n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.

Définition On appelle **ensemble des nombres rationnels** l'ensemble noté $\mathbb{Q}$ composé des nombres pouvant s'écrire sous la forme d'un rapport de deux entiers, c'est à dire :

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b},\ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$$

et vérifiant la condition :

$$\forall\,(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Propriété 6 (structure algébrique).

Dans $\mathbb{Q}$, on note $+$ et $\times$ les lois d'addition et de multiplication usuelles. Alors, muni de ces deux lois, on admet que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un **corps commutatif**, c'est à dire :

- $(\mathbb{Q}, +)$ est un **groupe commutatif** : $\begin{cases} \text{la loi } + \text{ est une loi de composition interne : } \forall\,(a,b) \in \mathbb{Q}^2,\ a+b \in \mathbb{Q} \\ \text{la loi } + \text{ est associative : } \forall\,(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3,\ a+(b+c) = (a+b)+c \\ \text{la loi } + \text{ possède un élément neutre, } 0 : \forall\, a \in \mathbb{Q},\ a+0 = 0+a = a \\ \text{tout élément appartenant à } \mathbb{Q} \text{ possède un symétrique pour la loi } +, \text{ appelé opposé :} \\ \qquad \forall\, a \in \mathbb{Q},\ \exists\, b \in \mathbb{Q},\ a+b = b+a = 0 \\ \text{la loi } + \text{ est commutative : } \forall\,(a,b) \in \mathbb{Q}^2,\ a+b = b+a \end{cases}$

- la loi $\times$ vérifie les conditions : $\begin{cases} \text{la loi } \times \text{ est une loi de composition interne : } \forall\,(a,b)\in\mathbb{Q}^2,\ a\times b\in\mathbb{Q} \\ \text{la loi } \times \text{ est associative : } \forall\,(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3,\ a\times(b\times c)=(a\times b)\times c \\ \text{la loi } \times \text{ possède un élément neutre, 1 : } \forall\,a\in\mathbb{Q},\ a\times 1=1\times a=a \\ \text{la loi } \times \text{ est commutative : } \forall\,(a,b)\in\mathbb{Q}^2,\ a\times b=b\times a \end{cases}$
- la loi $\times$ est distributive par rapport à l'addition : $\forall\,(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3,\ a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ et $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$
- tout élément non nul appartenant à $\mathbb{Q}$ possède un symétrique pour la loi $\times$, appelé inverse :

$$\forall\,a\in\mathbb{Q},\ \exists\,b\in\mathbb{Q},\ a\times b=b\times a=1$$

Remarque On retiendra donc qu'il s'agit d'un anneau commutatif dans lequel tous les éléments non nuls possèdent un inverse pour la loi $\times$. Bien entendu, si $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}^*$, alors son inverse sera donné par la fraction $\frac{b}{a}$ et ainsi :

$$U(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}^*$$

Théorème 7 (forme irréductible d'un nombre rationnel)**.**

Soit $\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}^*$, alors on peut montrer qu'il existe un unique couple $(a',b')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que : $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a'}{b'}$, avec a' et b' sans diviseur commun autre que ±1.

On dit encore que $\dfrac{a'}{b'}$ représente la **forme irréductible** de la fraction $\dfrac{a}{b}$.

Exemple 5 On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux définis par : $\mathbb{D}=\{\dfrac{a}{10^n},\ (a,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\}$. Montrer que $\mathbb{D}$, muni des lois usuelles $+$ et $\times$ désigne un anneau commutatif strictement inclus dans $\mathbb{Q}$.

2.3 L'ensemble des nombres réels

Définition On appelle **ensemble des nombres réels** l'ensemble noté $\mathbb{R}$ composé des nombres rationnels et des nombres irrationnels de sorte que :

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$$

Corollaire 8 (immédiat)**.**

On a immédiatement : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

Propriété 9 (structure algébrique)**.**

Dans $\mathbb{R}$, on note $+$ et $\times$ les lois d'addition et de multiplication usuelles. Alors, muni de ces deux lois, on admet que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un **corps commutatif**, c'est à dire :

- $(\mathbb{R},+)$ est un **groupe commutatif** : $\begin{cases} \text{la loi } + \text{ est une loi de composition interne : } \forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a+b\in\mathbb{R} \\ \text{la loi } + \text{ est associative : } \forall\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a+(b+c)=(a+b)+c \\ \text{la loi } + \text{ possède un élément neutre, 0 : } \forall\,a\in\mathbb{R},\ a+0=0+a=a \\ \text{tout élément appartenant à } \mathbb{R} \text{ possède un symétrique pour la loi } +\text{, appelé opposé :} \\ \qquad \forall\,a\in\mathbb{R},\ \exists\,b\in\mathbb{R},\ a+b=b+a=0 \\ \text{la loi } + \text{ est commutative : } \forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a+b=b+a \end{cases}$
- la loi $\times$ vérifie les conditions : $\begin{cases} \text{la loi } \times \text{ est une loi de composition interne : } \forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a\times b\in\mathbb{R} \\ \text{la loi } \times \text{ est associative : } \forall\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a\times(b\times c)=(a\times b)\times c \\ \text{la loi } \times \text{ possède un élément neutre, 1 : } \forall\,a\in\mathbb{R},\ a\times 1=1\times a=a \\ \text{la loi } \times \text{ est commutative : } \forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a\times b=b\times a \end{cases}$
- la loi $\times$ est distributive par rapport à l'addition : $\forall\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ et $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$
- tout élément non nul appartenant à $\mathbb{R}$ possède un symétrique pour la loi $\times$, appelé inverse :
$$\forall\,a\in\mathbb{R},\ \exists\,b\in\mathbb{R},\ a\times b=b\times a=1$$

Remarque On retiendra donc qu'il s'agit d'un anneau commutatif dans lequel tous les éléments non nuls possèdent un inverse pour la loi $\times$. Bien entendu, si $a\in\mathbb{R}^*$, alors son inverse sera donné par le nombre réel $\frac{1}{a}$.

Corollaire 10 (intégrité de $\mathbb{R}$).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$ab = 0 \Leftrightarrow \; a = 0 \text{ ou } b = 0$$

On dit encore que $\mathbb{R}$ est **intègre**.

▶ *On procède par double inclusion : on établit le sens direct en discutant les cas $a = 0$ et $a \neq 0$.*

Propriété 11 (relation d'ordre).

On rappelle que $\mathbb{R}$ est naturellement muni d'une **relation d'ordre total** $\geq$ définie par :

$$\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2,\; a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$$

et telle que :

$$\begin{cases} \text{la relation } \geq \text{ est } \textbf{réflexive} : \forall\, a \in \mathbb{R},\; a \geq a \\ \text{elle est } \textbf{antisymétrique} : \forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2,\; (a \geq b \text{ et } b \geq a) \Rightarrow a = b \\ \text{elle est } \textbf{transitive} : \forall\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\; (a \geq b \text{ et } b \geq c) \Rightarrow a \geq c \\ \text{et pour laquelle l'ordre est } \textbf{total} : \forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2,\; a \geq b \text{ ou } b \geq a \end{cases}$$

De plus, on montre que cette relation est **compatible avec les lois** du corps : $\forall\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$a \geq b, c \geq d \Rightarrow a + c \geq b + d, \text{ et } a \geq b \geq 0,\; c \geq d \geq 0 \Rightarrow a \times c \geq b \times d$$

▶ *On se ramène à chaque fois à l'étude de la différence des éléments situés de part et d'autre de l'inégalité.*

Remarque On peut résumer toutes ces propriétés en disant que $(\mathbb{R}, +, \times, \geq)$ est un **corps commutatif totalement ordonné** et on pourra toujours le représenter de la façon suivante :

3 Cas particulier d'une suite de réels indexés par $\mathbb{N}$ ou une partie finie de $\mathbb{N}$

Définition Soit E un ensemble quelconque. On dit que E est **dénombrable** si E est fini ou s'il existe ϕ une application bijective de $\mathbb{N}$ sur E, c'est à dire une application qui à chaque entier associe un unique élément de E. Dans ce cas, les éléments de E pourront être numérotés et on notera :

$$E = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$$

On parle plutôt de **suites d'éléments indexés par $\mathbb{N}$ ou une partie finie de $\mathbb{N}$**.

3.1 Les notations somme et produit

Notation Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une suite finie de nombre réels. On note alors la **somme** et le **produit** de ces nombres de la façon suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \ldots + u_n \text{ et } \prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times \ldots \times u_n$$

avec k un indice muet qu'on pourra modifier si besoin.

Remarque L'associativité et la commutativité des opérations dans $\mathbb{R}$ nous permettront de regrouper les termes par paquet ou de les réordonner afin d'en simplifier les calculs.

Exemple 6 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la **formule de factorisation** :

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

Propriété 12 (somme et produit télescopiques).

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et considérons $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une suite finie de nombres réels. Alors :

(i) $\sum_{k=1}^{n-1} u_k - u_{k+1} = u_1 - u_n$

(ii) et sous réserve d'existence, $\prod_{k=1}^{n-1} \dfrac{u_k}{u_{k+1}} = \dfrac{u_1}{u_n}$

▶ *Il suffit de mettre en place un changement d'indice pour faire apparaître le télescopage...*

Dans d'autres exercices, les éléments pourront même être indexés par plusieurs indices. C'est en particulier le cas des sommes doubles dont on retiendra les **formules d'inversion** :

Exemple 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $\{u_{ij},\ (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]\}$ des nombres réels complétant un tableau à n lignes et n colonnes.

1. Montrer que :
$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]} u_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} u_{ij}$$
2. Montrer que :
$$\sum_{(i,j)\in(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!],\ i\leq j} u_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} u_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} u_{ij}$$

3.2 Deux exemples fondamentaux : les suites arithmétiques et géométriques

Propriété 13 (définition d'une suite arithmétique).

On appelle **suite arithmétique de raison** $r \in \mathbb{R}$ toute suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence de la forme :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$
Alors,

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$, ou bien plus généralement : $\forall\, n \geq p,\ u_n = u_p + (n-p)r$ (formule explicite)

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$.

▶ *On établit simplement ces résultats par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}$.

Propriété 14 (définition d'une suite géométrique).

On appelle **suite géométrique de raison** $q \in \mathbb{R}$ toute suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence de la forme :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q$$
Alors,

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$, ou bien plus généralement : $\forall\, n \geq p,\ u_n = u_p \times q^{n-p}$ (formule explicite)

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} (n+1)u_0, \text{ si } q = 1 \\ u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ sinon} \end{cases}$.

▶ *On établit simplement ces résultats par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 15 (formules remarquables).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On retrouve alors les deux formules remarquables :
$$\text{(i)}\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(ii)}\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} (n+1), \text{ si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque On fera très attention à ce que ces sommes commencent bien à $k = 0$, quitte à compenser... il s'agit là d'une erreur très courante !

3.3 Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

Définition Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On appelle **coefficient binomial d'indices** k **et** n le nombre réel noté C_n^k ou $\binom{n}{k}$ défini par:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Corollaire 16 (propriétés immédiates).

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On a en particulier :

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(ii) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(iii) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

▶ *Il suffit à chaque fois de revenir à cette définition à l'aide de la notation factorielle.*

Propriété 17 (formule du triangle de Pascal).

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k < n$. Alors, on a la relation : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

▶ *On revient à la définition des coefficients binomiaux.*

Remarque On peut alors retrouver le **triangle de Pascal** qui nous donne une lecture rapide des premiers coefficients binomiaux :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$\ldots$		
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
n	1	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$			$\ldots$	1	
$n+1$	1		$\binom{n+1}{k+1}$				$\ldots$	1

Propriété 18 (formule du binôme de Newton).

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

▶ *On procède encore par récurrence sur n, dans laquelle on fera des changements d'indice pour regrouper les sommes obtenues.*

Exemple 8 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Remarques

1. C'est cette même formule qui nous permet d'obtenir les **identités remarquables**, et on pourra calculer facilement le développement de $(a+b)^3$, $(a+b)^4$...

2. La formule du binôme de Newton peut se généraliser, et il suffit la plupart du temps de vérifier que a et b commutent.

4 Cas particulier des nombres réels

4.1 La notation partie entière

Propriété 19 (définition de la partie entière).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un unique entier $n_x \in \mathbb{Z}$ tel que $n_x \leq x < n_x + 1$. Généralement, n_x est appelé la **partie entière** de x, et elle sera notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.
De plus, on a :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \ \Rightarrow \ 0 \leq x - E(x) < 1$$

et ainsi, la partie entière de x ne désigne rien d'autre qu'une **valeur approchée de x à l'unité près**.

▶ *On procède par existence et unicité : pour l'existence, on pensera à introduire l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$.*

Au delà de sa définition, les inégalités associées à la partie entière seront tout aussi utiles :

$$E(x) \leq x < E(x)+1, \text{ ou encore : } x-1 < E(x) \leq x$$

Exemple 9 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} E(kx)$.

Remarque Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, l'encadrement précédent nous donne en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$E(x10^n)10^{-n} \leq x < E(x10^n)10^{-n} + 10^{-n} \Rightarrow |x - E(x10^n)10^{-n}| < 10^{-n}$$

Ainsi, en posant $x_n = E(x10^n)10^{-n}$ et $y_n = E(x10^n)10^{-n} + 10^{-n} = x_n + 10^{-n}$, on a construit deux suites de limite x telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_n \text{ nous donne une } \textbf{valeur approchée par défaut de } x \textbf{ à } 10^{-n} \textbf{ près} \\ y_n \text{ nous donne une } \textbf{valeur approchée par excès de } x \textbf{ à } 10^{-n} \textbf{ près} \end{cases}$$

4.2 Sous-ensemble et sur-ensemble de $\mathbb{R}$

Définition On appelle naïvement **sous-ensemble** de $\mathbb{R}$ toute partie non vide A telle que $A \subset \mathbb{R}$.

En particulier, on appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ possédant au moins deux points distincts et constitué d'un seul tenant, c'est à dire :

- si I est majorée et minorée, alors I peut être de la forme :

$$\begin{cases} [a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\} \text{ et on dira que } I \text{ est un } \textbf{segment, un intervalle fermé et borné} \\ \text{ou bien } [a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\} \text{ et on dira que } I \text{ est un } \textbf{intervalle semi-ouvert à droite et borné} \\ \text{ou bien }]a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\} \text{ et on dira que } I \text{ est un } \textbf{intervalle semi-ouvert à gauche et borné} \\ \text{ou bien }]a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\} \text{ et on dira que } I \text{ est un } \textbf{intervalle ouvert et borné} \end{cases}$$

- si I est majorée et non minorée, alors I peut être de la forme :

$$\begin{cases}]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\} \text{ et on dira que } I \text{ est un } \textbf{intervalle fermé et non minoré} \\ \text{ou bien }]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\} \text{ et on dira que } I \text{ est un } \textbf{intervalle ouvert et non minoré} \end{cases}$$

- si I est minorée et non majorée, alors I peut être de la forme :

$$\begin{cases} [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geq a\} \text{ et on dira que } I \text{ est un } \textbf{intervalle fermé et non majoré} \\ \text{ou bien }]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x > a\} \text{ et on dira que } I \text{ est un } \textbf{intervalle ouvert et non majoré} \end{cases}$$

- et sinon, $I = \mathbb{R}$.

Définition On appelle naïvement **sur-ensemble** ou **extension** de $\mathbb{R}$ toute partie non vide A telle que $\mathbb{R} \subset A$.
En particulier, on définit la **droite numérique achevée** par :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Remarque Bien entendu, il existe d'autres sur-ensembles de $\mathbb{R}$ et le plus connu d'entre eux sera $\mathbb{C}$, l'ensemble des **nombres complexes**, qu'on redéfinira plus tard.

4.3 Borne supérieure et borne inférieure : définition et caractérisation

Définition Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Sous réserve d'existence, on appelle :

- **borne supérieure** de A le plus petit des majorants de A noté $\sup(A)$. C'est à dire :

$$M = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in A,\ x \leq M \text{ , c'est à dire } M \text{ est un majorant de } A \\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, x_\epsilon \in A,\ x_\epsilon > M - \epsilon \end{cases}$$

- **borne inférieure** de A le plus grand des minorants de A noté $\inf(A)$. C'est à dire :

$$m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in A,\ x \geq m \text{ , c'est à dire } m \text{ est un minorant de } A \\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, x_\epsilon \in A,\ x_\epsilon < m + \epsilon \end{cases}$$

Remarques

1. On peut observer que :
   - toute partie non vide admettant un maximum possède une borne supérieure et dans ce cas : $\max(A) = \sup(A)$.
   - toute partie non vide admettant un minimum possède une borne inférieure et dans ce cas : $\min(A) = \inf(A)$.
2. Attention, la réciproque n'est pas vraie puisque certaines parties de $\mathbb{R}$ possèdent une borne supérieure ou inférieure, mais pas de maximum ou de minimum : on pourra par exemple considérer l'intervalle $[-1,2[$. C'est même pour cette raison qu'on définit la notion de borne supérieure ou inférieure : elles représentent des extremas "limites" qui ne sont pas forcément atteints.

Définition On admet alors que l'ensemble des nombres réels vérifie les **axiomes de la borne supérieure et de la borne inférieure** de sorte que :

(1) toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$;

(2) toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Théorème 20 (caractérisation séquentielle des bornes supérieure et inférieure).

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors, on a :

(i) $M = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{il existe } (x_n) \text{ une suite de points de } A \text{ telle que } x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M \end{cases}$

(ii) $m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A \\ \text{il existe } (x_n) \text{ une suite de points de } A \text{ telle que } x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m \end{cases}$

► *Les deux caractérisations se démontrent de la même façon : on procède par double implication et pour le sens direct, il suffira de poser* $\epsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Avant de parler de borne supérieure ou inférieure, on vérifiera d'abord que la partie donnée est non vide et majorée ou non vide et minorée.

Exemple 10

1. On définit l'ensemble A par :
$$A = \{\frac{n-1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$$
Etablir que A possède une borne supérieure et une borne inférieure, puis déterminer la valeur de ces bornes.

2. Même question avec l'ensemble $B = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m},\ (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$.